行為の立場から見た数論理の構造

——背理発見のための check-points 設定の試み——

小　林　幹　夫

この試論において私達が研究目標とするものは，どこまで数論理一般に物理学的思考方法を導入することができるかということである。しかし物理学は自然現象を研究対象とし，数論理は Hilbert も言うように思惟（Gedankengang）の Abbild だけを問題とする。その限り，数論理の世界では物体も質料も存在しないから，物理学的思考方法はそのままでは記号論理一般に持ち込みうるはずがない。問題は，物理学的思考方法をどういう点で modify して，記号的世界に適用するかにある。

さて，私達が物理学的思考方法を記号論理一般に持ち込みうるのは，次の三つの点ではないかと考えてみることにする。

1. 数学的行為を取り出して，それの作用と反作用を考える。つまり反作用が有効に働いて来ない時，数論理一般に矛盾が必然的に現出してくるのではないか。
2. 物理学的「場」（field）の考え方をどういう意味で数学的世界に適用できるかを試してみる。量子力学では遠隔理論と近距離理論とを，個々の物理現象からよりは，むしろ場の概念によって全体的に統一する。この方法を記号的世界に利用できないかと思索してみる。
3. Heisenberg の不確定原理によると，観測者の主体は認識対象になんらかの Disturbance を与えることなしに客観界を認識しえない。そうした問題が数論理の中にもひそんでいるのではないか。

こうした三つの Postulate（要請）を設定してみることによって記号論理一般を究明しようとするのである。

だから19世紀から20世紀初めにかけて，はげしい論争を呼び起した形式主義，直観主義，論理主義の数学者達のように，数学を創る前の構成的立場から吟味しようとするのではなく，却って出来てしまった記号的世界は全体としてどういう性格をもっているかを明らかにしてみようとする。ここで記号的世界とは，(イ) 微視的には，仮定の式（Annahme Folmel）から終結の式（Schluβ Folmel）に至る論理的証明（Logisher Beweis）のための一連の式系列を指し，更に (ロ) 巨視的には，ある定まった公理系によって implicit に定義された命題函数全体の値域を指すものとする。

さて，行為を挙げれば必ず行為対象を考えねばならない。数学的行為の対象としての記号的世界は全体としてどういう構造をもち，どういう性格で特色づけることができるであろうか。

私達は記号的世界の特徴を次の四つの Schema に分けて考えてみる。

1. 1. Geschlossenheit；第一に挙げられる記号的世界の特色は，完結し閉じているという Gescholossenheit の性格である。これは，自然数は和と積の Operation を加えても，再

び自然数に属する，又は体（Körper）は四則演算によって閉じているという意味で閉じていることを，言おうとするのでもなく，また命題函数において適当の前置記号を置けば開いた命題も閉じた命題になるという意味で Geschlossenheit と言うのでもない。記号的世界における行為は，Axion 規定，Operation 規定（記号では一般に ε，∧，∨，⁊，⊃，∀，∃，etc.），対象規定（一般には，常数と変数の記号，命題函数，点集合，自然数，無理数，虚数等）があって，行為の質も行為対象も定まっているという意味で閉じている。

換言すると，私達には複雑多様な種々の行為が可能であるが，記号的世界に働らく行為は，非常に制限された，純粋化された行為しか働らきえない。人間の思惟の自由性によって私達が過去になかった新しい概念を記号的世界へ投げ入れたとしても，それが論理的厳密性をもった数「学」である限り，まず Axiom を定立し，その Axiom を通して論理的に矛盾を避けるように構成される。だから又，一つの新数学が生れたとしても，幾つかの公理と数学的対象と Operation が定まれば，計算以前に予じめ数学的対象の定義域は定まっている。逆にまた，証明し終えた式系列において，始めの式から終りの目的の式まで，証明はただ一つの意味を言おうとし，完結した論理的証明の式には，矛盾したこと，無駄なこと，不要なことは省かれている。意味は Tautologie（同義反覆）として，ただ一つのことの繰返しにしかすぎない。

こうした公理や仮設の約束の上にこそ，証明論的に完結し，閉じているのである。

1. 2. Zeitlosigkeit oder Jetzigkeit；次に無時間性または同時性の特質である。記号的世界には，次々と数学的行為が働らきながら，その都度，行為の時間性は消し去られている。Genzen の言ら思惟の直線性 Linealität des denkens によると，前の式は後の式を導き出すのであるから，その限り前後の時間性があるのではないかという反論も成り立ちうるが，ここで無時間性，同時性と言うのは，記号，数式，命題函数等は，一度表現され，名前づけられてしまうと，何らの時間推移なしに，そのままの同時性をもって後の式に現わる。勿論例えばミンコフスキー空間，確率過程，時系例等では，記号的世界においても時間が表現されてはいるが，それも空間化された一次元の時間か，または単なる変数としての時間であって，行為の後に主体または客体が何等かの意味で質的に変形し転換することを予想しての時間表現ではない。

1. 3. Wiederspruchsfreiheit；前に挙げた閉鎖完結性と時間喪失性を夫々，前者は記号的世界全体の，後者は記号間の a priori の性格規定と言えるとすれば，次に述べる 1. 4. の Automatische Struktur と，この 1. 3 の無矛盾性 Wiederspruchsfreiheit は夫々，記号的世界全体および個々の Operation を運んで行く経過の a posteriori の性格規定と言える。

個々の式操作は，論理的には同一律，矛盾律，拒中律，数論理的には交換律，結合律，分配律，吸収律，最大元最小元の存在，補元の存在等の操作規定 Operationsregel によって規定されて，式変換の系列は運ばれて行くが，式操作全体は無矛盾性という真理性によって包括的に運命づけられている。

一般に証明のための式の系列（Beweis Formel）において，Annahme Formel（前提となる式）は，Schluβ Formal（終結の式）をeinschlieβen し，終結の式が Annahme Formel から如何に独立するかに証明論はかかっている。そうした証明論（Beweis Formeln）の中で，個々の式変形の行動は実際には公理，定理，定義によって規定されている

のであって，人は式変形に際して，或る終結の式を目標とし，個々の Operation を行ないながら，必要に応じて，その都度適宜な Operation や公理や定理や特殊函数を使っているのである。

そうした連続的な計算と式変形において，真理性とは前の式と後の式の無矛盾，導き出されてきた式と公理や定理との無矛盾，または一般経験界と乖離しないという形で表現され，矛盾が顕(あらわ)になった時，その命題は非真理として記号的世界から取除かれる。仮に帰謬法が仮定の式からの矛盾導出による真偽二値の判断によるとしても，それは真（valid）の証明のための偽りが必要なのである。

だから行為の側から見た無矛盾性とは，普通に論理学または数学でいう無矛盾性と違って，必ず何らかの反省 —— 前後比較考量の反省を前提としている。式変形の論理操作によって，始めの出発の式から変形してきた式や命題と，公理，仮定，定理等および出発の前提式とが論理的に一致していなければならない。こうした観点と Genzen の思惟の直線性から眺める時，無矛盾性は前後比較対照という意味で implicit には，少くとも時間推移と云う性格を隠しもっている。

数論理における真理性は，無矛盾をめぐって回転するのであるが，無矛盾性は命題の真理性を決定することだけが論理のすべてではなく，不可能，不定，非決定の命題も数論理の中には導入されてくる。しかしその命題の不能，不定，非決定であることを決定できるのは，その命題が真なることを証明する時と，同じ手続きと操作を通り，その限り，不可能，不定，非決定を決めるまでの手続きでは無矛盾性を通じてしか式計算の連続操作は維持できないし，また何等かの判定をも下しえないのである。

1\. 4. Automatische Struktur oder Tautologischer Charakter；記号的世界は全体として自動的構造または同義反覆的性格を持っている。この特性は直感主義者が形式主義，公理主義の数学者を攻撃する時に使う Spiel と云う言葉が，最もよく特徴を表現しており，数学はこうした抽象化された純粋数学としての Spiel 的，Tautologie 的な構造と機能を持つが故に，却って自然科学にも経済学にも，その他の科学にも適用でき，また電子計算機に input して output としての解答を出しうるのである。この点で，Pasch が数学の公理は経験界の法則の Kern Satz であるといった言葉は，その当否は別として，私達に興味深い。

ここで記号的世界の構造は，それ自身の運動法則を持った装置 Apparat に譬えることができ，数値の刺戟を与えれば，その装置は自動的にそれ自身の運転法則に従って自然に答が導き出されてくる。この自動装置的な性格を最も巧妙に利用したのが，計算機，翻訳機械，Cybernetics などである。

こうして自動的な Apparatus は，どんな刺戟作用によっても affizieren されるわけではなく，標準化した単位としての刺戟しか受けつけず，その刺戟作用としての単位を自動的，機械的に標準で規正して自動操作は運転し，受け入れる刺戟の反応としての答を出してくるのである。それと同じように記号的世界の運動方式も，そしてその中における人間の行動も，前提条件に規定され，操作規定の定まった，固定した行為しか許されない。それ故に，数学的行為は数学が如何に細分化し，専門化したとしても，複雑な機械も簡単な捩子(ねじ)や梃子(てこ)や歯車や変圧機等に分解される如く，複雑な体系をもつ数学も実際は単純な論理作用を幾つか組合せて出来あがっているにしかすぎない。しかし夫々の場合に操作規定はきまっていたとしても，どれを先に選ぶかは全く任意であるから，数

式計算の熟練者とは，目的の式に至る式変形に際し，次に取るべき一連の式操作を速く巧みに，しかも最も簡単に取り出すことのできる人である。数学と論理計算の機械的性格は，だからある程度，操作選択の自由性をはめ込んだ機械性である。式操作の Spiel 性は，そうした自由性の謂に外ならない。

しかし純粋数学が公理，定義，定理，系を前提とした終結式への論理的な Spiel であったとしても，逆にそういう Spiel 性があるからこそ，数学および論理学は広い応用範囲を持ちうるのである。命題や数式が現実の個々の具体物に滞りすぎたら，それは単にある時，ある場所の，ある特定のことについてしか，言表できない。抽象性，自動性，遊戯性こそ，むしろ数学の持つ美点と言える。数論理は，その意味で Spiel 性と形式性を持つことを恐れる必要は全くなく，却ってその抽象的な論理的整合性こそ，そしてその論理的機能こそ，数論理がもつ他の科学に対する優越性と言えよう。

数学基礎論には，集合論の誕生以来，幾つかの立場があった。その代表的なものは，形式主義，直観主義，論理主義と言える。彼等は公理からの無矛盾の式証明に重点をおくか，拒中律に無限にまつわる矛盾導出の根元を見出して，これを排して，数学を構成的に建設しようとするか，または数学のもつ論理性に重点をおいて，何故種々の矛盾がでてくるかを反省するところから出発した。私達の立場は，それ等とは違って，証明が論理的に完成し，証明が終った時，数学的記号世界は全体として場（field）的に，どういう性格，構造，機能を持つかを剔出する。それが私達の第一の作業であった。

次に記号的世界における行為は，如何なるものかを考究するのが，私達の第二の作業である。

これを私達は次の六個の pattern に分けて考えてみる。

2. 1. 数学的行為の規定性

数学的行為はその対象，操作，公理の規定を通して行なわれる。数学的行為の連続性はこうした行為規定とその対象を支配する法則性によって維持されて行くのであって，行為が対象の同一性を破ったり，途中で行為条件が変ったら，数論理はその機能を失なってしまう。例えば，ユークリッド幾何学において自由に補助線を引きうるのは，行為の前後に要素（初等幾何では点，直線，角等）の制約にも行為の制約にも変化がないからである。また G. Cantor の対角線論法（Diagonalverfahren）によって新たな数列をつくったとしても，並べられた各小数の小数点以下の数列の全部は順序数であり，それから順次に一つづつ取って出来た新たな数列も Cardinal number であって，その間に非順序数の要素は入りこんで来ない。

このように数学的行為においては，公理，対象，操作規定の一連の行為装置の設置があって，初めて数学的行為は行為としての機能と同一性と真理性を担いうるのである。

2. 2. 対応作用（correspondence）または写像（abbilden）

これは総ての数学的行為のうちで最も基本的な行為であって，私達はこの対応作用を次の三つに分けて考える。

2.2. 1. 空間的対応

これは集合論，抽象代数でいう one-to-one correspondence＝isomorph または one-to-many correspondence＝homomorph を指し，函数論や幾何学一般における座標的表現は点と各座標軸の対応作用によって表現される。これは抽象代数の基本であるから詳述を要しないであろう。

2.2. 2. 直線的対応

証明論一般，代数計算，記号論理は，この直線的対応に基づく。Genzen の所謂「思惟の直線性」'Linealität des Denkens' によって，Formel Fn_{-1}，Fn，Fn_{+1} が，Fn_{-1}→Fn→Fn_{+1} と変形して行く過程において，式 Fn は式 Fn_{-1}の前提のもとに初めてその真理性をもち，また Fn の前提のもとに，それに何等かの Operation を加えて Fn_{+1} は成り立ちうる。こうした対応を私達は直線的対応と呼ぶ。

2.2. 3. 段階的対応

総ての数学の根底に集合論があり，総ての記号論理の根底に点集合論または集合論理があるとすると，最も根底にある集合論を代数的に外延を狭めて行き，今，仮にその操作規定だけから見たとすると，集合に積（または和）だけの Operation を加えると群（Gruppe），和と積を加えると束（Lattice），加減乗を加えると環（Ring），四則演算を加えると体（Körper）となる。また幾何学的に見ると，集合の連続性 Continuity のみを考えると位相空間，直線概念を入れて射影的対応を考えると射影空間，これに metric（計量）の概念を導入して一直線を固定するとアフィン空間，二点を固定するとユークリッド空間，ユークリッドの平行線公理を否定して「直線G外の一点Aを通りGと交わらない直線は無数にある。」として背後に実二次曲線を固定すると Lobatschevsky-Bolyai の非ユークリッド幾何，「一点Aを通ってGと交わらない直線は一つもない。」として虚二次曲線を背景に固定すると Riemann の非ユークリッド幾何が出来る。

論理一般において n 個の Axiom で implicit に定まる命題の値域全体は，その Axiom の変換によってその値域を変ずる。こうした対応を段階的対応と呼び，Klein の Erlanger Programm は幾何一般の Axiom とそれによって定まった対象の対応の仕方全体の Schema を設定したものと言える。

この三つの対応，すなわち空間的，直線的，段階的対応は，種々の数字的行為のうちで最も基礎的な行為と言うことができる。が，実際には，数学はこの二つまたは三つを混合してつかっている場合の方が多い。

2.2. 4. 対応移動

現代の集合論は，古典集合論と違って，もう既に点集合の Bild を要しない。数論理的に公理に従って無矛盾に形成される。しかし，始めに点集合の素朴なイメージがなかったならば，集合論は発見されなかったであろう。このように，空間的対応（点集合）は代数化されて，前にあげた論理的式変形の直線的対応に移動される。総じて，幾何学は現代に近づくにつれて，代数的に公理化（Axiomatisierung）される。ただ，空間概念が，古代に比べて，非常に豊富になっている。

こうした対応移動の例として，譬えば連続の定義において，$|\varepsilon-\varepsilon'|>\delta$（$\delta>0$，任意の δ に対して）の論理は，連続を明確に定義したものであり，また開集合系の決定による位相空間の論理的表現は，元来平面上で考えられた開集合を，私達の言う思惟の直線性つまり代数的論理的に表現した好例と言えよう。

ここで参考までに触れると，Polya によれば，数学者は二つの系の間を類比（Analogy）することによって一般式を見出し，それを特殊の式に当てはめて確証をうるという。類比，一般化，特殊化を彼は数学的思考方法の根本においている。一般式を見出す前の数学者の推測は，必ず類比を通して行なわれる。

しかし，私達の視点では，証明式が完結した後の式系式を問題としているので，Polya

の見方とは自ら異なってくる。

2. 3. façon de nommer の作用

「神が与えたまうたのは 自然数 だけである。その 他は 人間の 創造物である」とは Kronecker の有名な言葉であるが，人類は次々と記号的世界以外のものを記号化して数学の中へ持ちこんだ。太古印度において，恐らく危惧と懐疑をもって零は数字の中に加えられたかもしれない。それ以来，負数，有理数，無理数，虚数は順次記号化されて記号的世界の住民権を得た。19世紀には，無限さえも 実無限（aktuelle Unendlichkeit）としてアレフ数という記号となって計算の対象とされるようになった。こうした記号化の作用を私達は façon de nommer（名前づけ）の作用と呼ぶ。ここで函数論の特殊函数やフーリエ級数なども，広い 意味で façon de nommer の 一部 と見られ，未知 の 函数を〝名前づけられた〟既知の函数に導くことによって与えられた函数に導くことによって与えられた 函数 の 性格を定めることができる。Hilberl は Kant の Idee の意味で数学は Ideal Element（理念的要素）を 必要 とすると述べているが，その限りまた，彼の所謂超数学 Metamathematik の吟味が絶対不可欠のものとなってくる。数学は現実と経験の中に決して与えられない理念的要素さえも大胆に導入することによって，その領域と応用範囲を次第に拡めてきたのである。

2. 4. 選択作用一般（Auswählung überhaupt）

選択というと，数学基礎論的には Zermero の選択公理を思い出す人が多いであろう。また，違った観点からすると，確率論，測度論，或いは統計の Sampling を念頭に浮べる人もいるかもしれない。

しかし，ここで私のいう選択とは数学を行為の面から見たものである。一般に数式計算において，どの式を選んで，どの Operation を先に行なうかの問題を，行為としての選択作用という。例えば，今，自然数だけの領域を定めておき，それに自然数を無限回加えても乗じても自然数の Domain を越えないが，もし自然数に平方根の Operation を入れて $\sqrt{3}$ を考えると，只一回の操作で忽ち自然数の領域を出てしまう。 操作の選択と順序はある領域を決定して，そこから論理的に表現を考える場合，必ずしも等閑視できない。ある Axiom 系を設定しておいて，その中の一つの式がどんな変数（any variable）に対しても恒真的に成り立ちうるか否かを定める所謂決定性 Entscheidbarkeit の問題は，こうした操作の選び方と順序の組合せの面からも考えうる。又一般に自然現象を数論理的に因果法則を解明しようとする場合，大きくはどんな Axiom 系の 空間を選ぶか，小さくはどの条件，どの Operation から 手を つけるかも，この 選択一般 に属する。又，日常的な計算や論理計算の場合には，この選択は計算の熟練の問題ともなる。

2. 5. Akt an sich の性格

これを次の二つに分けて考察する。

2. 5. 1. Mathematischer Akt an sich

Peano の公理を籍りるまでもなく，自然数が noch weiter の性格をもつように，数学的行為も行為自身の性格から，同一規定の行為を何回も，否，無限回までも試行することが想定される。 Fraenkel が自然数を構成するのに，0を0，1を0だけを要素としたものとして {0}，2を{{0}}，3を {{{0}}}………として表現したのもこうした Akt an sich の性格のうちに入れられる。直感主義の無名の Strich の連続，|，|，|，|，………は，意識現象についてこの noch weiter の性格を言ったものと思われる。Cantol

の対角線論法も，構成的にはこの行為のうちに含まれ，noch weiter という点では同じ性格に属している。

2.5. 2. Akt an sich als Expression

これは直接数学にはあまり関係はないが，日常言語一般では非常に頻繁につかわれていることである。その意味で記号論理や論理一般では注意を要する。人間は言語文章記号だけで表現するのではなく，行為によっても語り表現するのだという素朴な単純な事実を人は忘れやすい。そしてそこからくる矛盾を何か神秘的に考える場合さえある。例えば Russell は，“Do you hear my speaking ?” と訊かれた人が，即座に “I hear nothing.” と答える論理的矛盾に触れているが，これは言葉の意味ではなく，単に発音し喋べるという行為を忘れているから難かしくなる。

この点では東洋人の思惟と表現，特に禅などでは，昔から行為的表現を重視しており，私達はその例を幾つも挙げることができる。人間は言葉のみではなく，行為でも表現するのだという実に素朴な事実を無視して，言葉だけの矛盾を追うから徒らな難渋さを招く結果となる。

2. 6. 天才的直感

これは時に偶然的であり，時に神秘的であり，どうしてその時その人に天才的直感が生れてきたかは，多くは説明不可能である。これの解明の方法としては，P. Voutroux のようにその前の数学史から原因を探す数学史的方法，J. Hadamard や H. Poincarè のように天才自身による心理的分析から見られる解明方法，また例えば Newton の質点力学を当時の精神史的背景から見るもの，また確率統計の発達がその時代の社会的要求から促がされたと見る考え方，唯物史観的説明方法などがある。が，これはいずれも後からの説明にしかすぎず，直接現在必要とする方法論を発見する手段とはなりえない。結局天才的直感は本来解明不可能なので天才的とも神秘的とも言われるのかもしれない。

ここで注意すべきは，一つの天才的直感が一つの表現しか持たないかと言うと，必ずしもそうではなく，例えば位相空間は点近傍でも開集合でも閉集合でも表現できる。

しかも今迄述べてきた 2.2. から 2.5. に至る数学的行為は何回も繰返しができるものであるが，この天才的直感は一回性しかもたず，この出現の後，記号的表現の世界は別の次元に入る場合さえある。例えば復素平面によるヴェクトル空間での虚数の次元の利用などはその好例であろう。

G. Cantol は「数学の本質はその自由にある」と語っている。数学もまた人間の思惟の自由性に根ざす。この自由創造の思惟が矛盾に直面して，専門分野自身の中から，または直接人生の事件と現象から，矛盾解決の糸口となる方法と手段を発見して，それを論理的に無矛盾に構成しえた時，天才的直感はその役割と有効性を持ちうる。

しかし多くの科学史の実例からも知られるように，天才の発見が直ちにその当時に認められるとは限らず，遥か後世になってその意義が初めて発見される場合もあり，また天才の発見した一つの式や一つの法則が，時代経過と共に益々重要性を帯び，天才自身さえも知らなかった意義と役割を担ってくることもある。

ところで，天才的直感が神秘的な解明不可能なものであるからと言って，その発見自身が複雑難解なものばかりとは限らず，むしろ直接経験界から事実や方法を拾いとる故，単純素朴なことが多い。Einstein の特殊相対性理論の発見のモチーフ，Cantol や

É. Galois の実例を見ても，私達はむしろ彼等は素朴な事実に深い意義を賦与したと言うべきかもしれない。また Poncelet や Wittgenstein が戦争で俘虜となって牢獄の中にあったから彼の発見が可能であったかもしれず，ここでも一切の技術的知識は，哲学する，発見する，創造することにとっては邪魔となるのかもしれない。

結局私達は次の平凡な事柄を天才的直感について言うことができるのかもしれない。

(a) 天才とはその時代の矛盾や時代的な切実な要求を背負って生きている。

(b) 専門的知識の基礎はなくては困るが，それに捉われすぎてはならない。

(c) 素朴な疑問や事実を長い間頭の中に置いて，その理論的基礎を頭の中で考え続けること，または考えざるをえない情熱の持続をもつこと。

(d) 直接人生の諸事象または他の科学の発展を注意深く見つめること。

(e) 一事に没頭集中することと，何事にも捉われざる客観的態度の，相反した方向がともに必要であること。

数論理一般における行為規定が思惟の無矛盾の直線性によって維持されているとすると，数論理の世界の高次の連続性は，こうした天才的直感による断絶と飛躍の非連続性を通して発展して行く。数学的行為の非連続性は，こうした天才的直感を待って初めて新たな連続性の局面に入りうると言えよう。

さて，私達は物理学的思考方法をどこまで数論理の中に持ち込みうるかの意図をもって，むしろ素朴な行為と対象を考える立場に立って数学的行為の性格を考え，その行為対象の Schema を挙げてきた。

しかし数学・論理学の面から見ても意味論の方向から考えても，単に Schema 設置と行為性格の pattern をあげただけでは覆いきれない若干の問題点が残る。

静的 Schema は一回的な行為の図式ではありえても，元来行為とは動的効率的なものであり，一つの条件や一つの行為は本来 purspective の効果を残していく。

そうした観点から，静的 Schema の応用に際して，動的発展的な面から，次の注意事項を述べておく必要がある。

3. 1. 一つの記号や単語，一つの定義，または一つの条件は他の箇所で別の事を imply したり，他の要素を含入してはならない。これは数論理では比較的稀であるが，日常言語使用では頻繁に行なわれている場合が多い。

3. 2. Abbilden は，常に自己の外へ写像するのであって，自己を自己に写像した時，それはナンセンスであり，写像としての効果が生きてこない。

3. 3. 公理，定義，Operation の選び方によって記号的世界一般の性格は異なってくる。仮に Hilbert の言うように二つの公理の独立性が論理的には確認されても，もし記号的世界全体へ及ぼす効率が等しい時，一つの公理は或る程度式変形が進んだ時，他の公理からくる式変形と同じ効果を論理野全体に常に及ぼすことがあり得る。これは特に Computer の時代を迎え，論理が機械語に移された場合，入力から出力の過程では特に頻繁に起りうる現象と考えうる。

3. 4. 数論理，延いては論理一般の対象は，その根底には点集合を予想しており，そこに条件設定によって，記号的世界の構造は変ってくるのであるが，こうした条件が論理的行為的に有効性（換言すれば無矛盾性）を維持しうる限界点を明確にする必要があり，条件の限界点を越えた所では，数論理の法則は適用できなくなる。これは勿論，Hilbert

の言う公理の完全性の問題でもあるが，私達はこの条件の有効性の限界を意味論や自然科学の論理模型一般にまでも適用できるように拡張して考えたい。

3. 5. 論理は常に確実から次の確実へ移行すべきであって，不確実な論拠によって確実な結論を下してはならない。また不確実な立論から結果として出て来た確実は，何か方法論的に反省すべきものを持っていると考えるべきである。（この事は，単に論理学の中で理念的要素の使用について言っているのであって，Masse として全体を考察する統計的思考方法をこれと一緒に考えてはならない。）これは，仮説と方法の問題であり，Kant の所謂理性推理の仮像（Schein）の論理の問題ともなる。確実→確実の途中に不確実の要素が混入してくる時，その都度，不確実な要素を吟味する必要が生じてくる。

3. 6. 真理性，無矛盾性とは，数論理の場合同一性の繰返しが主因となっている。この同一性の維持を崩壊してはならない。

以上で私達は，数論理における行為の patterns とその対象の Schemata とその使用に際しての注意事項を挙げてみた。

勿論私達の Schema は数学者の所謂勝義の数学の論理的構成に直接役立ちうる点は少ないかもしれない。しかし Kant の純粋理性批判が，在来の形而上学に対して果した役割は，むしろ消極的なものであった。それは形而上学の建築学に規正的な役割を果たし，迷蒙を除去し，認識と思考の確実性の限界点を指適することによって，学としての認識の確実性を建立するところにあった。丁度こうした意味で，私達は Kant の第一批判がそれまでの形而上学の迷蒙にはたした役割を，私達の Schema 設定と行為 pattern が，数論理一般にはたしえないかと試みてみる。もし，私達の論拠が正しいとすれば，それを数学や論理学に適用した場合，矛盾や誤謬の生じてくる原因を辿りうるはずである。それは，集合論の矛盾や排中律の問題から生ずる数学の「病理」に対して，その病因を尋ねうる臨床的診断表となりうるはずである。私達の数学的行為の pattern 規定とその対象の Schemata 設定は，そういう意図をもっている。

そこで次に，若干の昔から有名な論理的矛盾をとりあげてみたい。

しかしその前に，もう一度私達の背理をとりあつかう態度を反省してみたい。というのは，現代の時点に立ってギリシヤ以来の Paradox を問題にするのは，それだけの理由がなくてはならぬからである。

我々の時代は Computer の時代である。逆に言うと，我々人間の頭脳さえも精密複雑な Computer とも見做される。さて，数値計算や Game や論理計算を Computer が処理しうるとすると，Computer は言うまでもなく一種の機械であるから，input から output への過程には機械的な効果が予定されている。そうすると少なくとも Computer の中では，物理的に因果律が働らいていると見られる。我々の立場はそれを念頭においた数論理の効率的な見方である。

次にことばと数学は，19世紀の Cauchy の，函数の論理としての自覚以来，そして又集合論の誕生以来，密接不可分の関係で捉えられるようになった。更に20世紀より，ことばは Semantics, Syntax, Pragmatics の新たな視座から見直されるようになった。我々の古来の逆理を見る視点は，当然の結果として，こうした研究成果をも考慮に入れて，矛盾を究明しようとすることは言うまでもない。しかし，だからと言って，我々の視点からすると困難な矛盾が一度に摩可不思議に解消するわけではなく，むしろ何故矛盾が導出されて

くるかを，我々の Schema 樹立から明らかにしようとするのである。繰返して言う，我々の立場は矛盾を解明しようとするのではなくて，矛盾が導入されてくる原因を解明することが課題なのである。

Example Ⅰ. The Creata's lier の背理（エピメニデスの逆説）

昔，クレタ島の人エピメニデスが「すべてのクレタ人はうそつきである。」と言った。この言葉を信じると，その人の言ったことは信頼できない。逆にその人が真実を言ったとすると，言った言葉が虚偽になる。この自己矛盾である。これは，次の四点から矛盾発生の原因を辿ることができる。

(イ)　「すべての」という全称命題の前置記号に問題がある。

(ロ)　発言したクレタ人は一人なのに，全体の代表として語るところに問題がある。

(ハ)　主文と引用文の動詞の時称が一致しいるから矛盾が起る。

(ニ)　自己について語るところに問題がある。

まず(イ)から考えてみよう。これが若干のクレタ人がうそつきだと言ったなら，勿論矛盾にはならないが，しかし必ずしも全称命題だけに，矛盾の原因があるとは言えない。何故か。例えばクレタ島の住民が100名しかいないとして，100名全部が一緒に並んで，異口同音に「我々はすべてうそつきである。」と他のクレタ島以外の人に叫んだとしたら，勿論矛盾にはなるが，これは(ニ)の自己自身について語る問題と全く同じことになる。これは(ニ)で論じよう。とにかく，必ずしも「すべての」という形容詞だけが矛盾発生の原因とはいえない。

次にクレタ島人全体の代表者の一人が，「すべてのクレタ島人はうそつきである。」と言った時の，代表者としての発言の問題である。代表者は全体の考えと言葉を完全無欠に代行したとすると，そこでは全体の性格も一人と同じくなるから，二次的にまた(ニ)に還元されてくる。次に代表者は単に全体の中に含まれる一員であるとして，考えてみる。もし，言った言葉の意味を真実ととると，その代表者の言ったことは虚偽とも真実とも決めえない。ここで二つに分けて考えてみる。その代表者が，その時だけ真実を言ったなら，彼はクレタ島の住民でありながら，もうクレタ島の住民でなくなってしまう。もしまた，その時もうそを言っていたなら，言った言葉自身に信頼性がないことになる。換言すると，「全部のクレタ島人がうそつきだ。」と言ったことが，無意味になる。前者の場合には，その時真実を語ったなら，代表者でなくなり，後者の場合には，言うという一つの行為が効果をもたない，無意味のことになってくる。従って言った言葉も無意味になってしまう。

この背理を，我々の数論理の構造から見ると，どういうことになるであろうか。

思惟の直線性つまり 2.2.2. の直線的対応により，Quotation の中のすべてのクレタ島人という主語と一人のクレタ島の代表という主語の一致同一が対応比較され，代表者でないか，言った意味が無意味かのいずれかが明らかになる。

(ハ)の問題に移ろう。過去のある時のクレタ島人全部はうそつきだったと，現在一人のクレタ島人が言っても矛盾にはならない。将来のある時点でクレタ島人全部がうそつきだろうと，現在一人のクレタ人が言っても矛盾にはならない。逆に一人のクレタ島の人が言う時を過去にしたり，未来にして，Quotation の中を現在にしても矛盾にはならない。矛盾が出てくるのは，過去，現在，未来に関係なく，一人のクレタ島人の言う時点と，Quotation の中の時点が同一の時だけである。

これは，我々の数論理の構造の Schemata の同時性，Zeitlosigkeit からも見ることができる。即ち，一人のクレタ島人が言った時は，もう言われている事実は，厳密には過去に属する。人はそのことに気づかない。しかも，潜在的にはその時間のずれを当然の事として認めている。だから，日常の言葉としては，このクレタ島のうそつきの話は一見矛盾なく受け入れられる。しかし，論理的に二つの動詞の時間の一致を考えてみると，矛盾に気がつく。これこそ，我々の数論理の Zeitlosigkeit を明瞭に示し出した矛盾といえよう。

㈡の問題としては，我々の立場からすると，自己の写像の不可能の 3.2. にあてはまる。例えば，「私は踊っている。」と言って，坐っていたり，「私は留守です。」と言って家から当人が出て来た場合と同様である。「私はうそつきです。」と私が言う場合，過去の自分や日常の習慣としての自分を客観的に分けて言っている場合には，矛盾にはならない。今のこの一瞬に私はうそつきですと，私が言う場合には，言葉はナンセンスになる。これはクレタ島人のうそつきと同じである。

ただ，前にあげた「私は留守です。」や「私は踊っている。」の矛盾は，語られている自己の状態と現在の自己の存在又は自己の状態とが矛盾しているのであるが，私がうそつきだと私が言う場合の矛盾は，言うという一つの有意味の行為と発言された内容とを比較対応させると，ナンセンスになるのである。つまり行為に正しい効果が伴わないのである。

Example Ⅱ. Zenon の Paradox

Zenon の Paradox も幾つかあるが，ここでは紙数の都合で次の二つだけを問題にする。

イ．運動体は終点に到く前に，走路の中点に到かねばならない。またその前に前の走路の二分の一の間の中点を通らねばならぬ。以下無限の繰返し。従っていつまでたっても，終点に到きえない。

ロ．アキレスが亀に追いつくのには，亀の出発点に到かねばならぬ。しかし，彼が亀の出発点に到いた時は，亀はある程度進んでいる。以下無限の繰返し。だから，アキレスは亀に追いつけない。

この Zenon の生きたギリシヤ時代には勿論実数の連続もまた連続体の Möchtigkeit についても知られていない。そういう点では，Zenon は無意識的に連続体を予感していたのかもしれない。これは集合論誕生以来初めて自覚的に捉えられた数論理の大問題と言える。この観点からも，この逆説は考察できるが，今の私達にとっては直線上の実数無限連続を指適するだけで充分であろう。

さて，私達の立場からこの背理を吟味すると，単に行為規定または仮定と主体性の間の矛盾と考えられる。追いつく追いぬくとか，終点に到達するということは，速度を変更しうる主体性があって初めて可能である。しかるに，アキレスは亀の出発点に到くことだけが，仮定として決められている。従っていつになっても追いつくことも追いぬくこともできない。運動体が走路の中点を通るという行為規定でも事情は同じである。ただ，後の場合には，連続体の性質が強く入ってくる。

これはまた，無限回の試行という点からも考えられるが，これは次の項で取扱う。

Example Ⅲ. 拒中律排斥の問題

Dedekind の切断の発見以来，排中律は数論理に深刻な疑問を投げかけた。これに対して Brouwer, Weyl, Heyting 等の直感主義者は，数学的存在を論理的構成可能性に帰し，矛盾の生じてくるのは，拒中律の無制限の使用にあると考えた。Brouwer は，その example を π の数列に求めて説明しているが，私達はここで，Heyting の例を挙げてみよう。

今，素数Kがあって，K－1も素数であるような最大の素数Kを探す。もし，そういう数が存在しないなら，K＝1とする。これはK＝3と直ぐ解答をうる。

次に，今，素数ℓがあって，ℓ－2もまた素数であるような，最大の素数を探す。もし，そういう数がなかったらℓ＝1とする。

この二番目の問題では，いつになっても，求めるℓが見出しえない。しかも，そうした性質の素数ℓは確かに存在するはずである。論理的には存在するといえて，実際には存在を確かめえない。そこで，存在する，存在しないの排中律が成り立たなくなるのである。

ここで，拒中律を成り立たなくさせているのは，無限ではなくて，無限回の試行である。無限回に近い試行でも，ℓの存在が確かめえないところにある。

Hilbert の言う通り，Kant の Idee の意味で Ideal Element を数学は必要としながら，Ideal Element を数論理の世界に持ちこむ限り，その吟味や検証も必要になる。ところが，この例では，その検証に，人間の有限な経験が追いつかないことになる。

私達の立場からすると，「素数ℓがあって，ℓ－2もまた素数であるような，最大の素数を探す。」という仮定は，一つの façon de nommer と見られる。それが，行為自身の無限の繰返し，即ち2，5，1，の数字的行為自身の性格と矛盾する例と見られる。名前づけは可能でありながら，その検証の段階で，行為の無限性に追いやられ，明確に存在を規定できない実例といえる。

Example Ⅳ. Russell の逆理

自己自身を成員としないすべての集合の集合をWとする。その時，任意の集合Xについて，「XはWである」ということは，「XはXでない」ということに等しい。XにWを代入すると，「WはWである」ということは，「WはWでない」ということに等しくなる。この自己自身を含まない集合の集合の逆理である。ここから，Russell は，この逆理の解決方法として，悪循環を避けるために，階型の理論（theory of type）を創り出している。

Ⅰのクレタ人のうそつきでは，すべてのという量記号は，必ずしも最大の問題ではなかったが，この逆理では，「すべての」は，非常に問題になる。何故か。「すべての」が，二重の意味作用を担ってしまうからである。というのは，すべてということばは，当然その成員（member）全部を含んでしまうからである。さらに，すべてという言葉は，その「すべて」の成員を含むという動詞の意義も担っている。ここに矛盾の原因がひそんでいるのである。

その他に，自己写像の問題が原因となっていることは，言うまでもない。だから，この逆理は，次の三点が矛盾導出の原因となる。

(イ) 「すべての」は，全成員を含む意義をもつ名詞または形容詞である。

(ロ) 「すべての」が「含む」という動詞の意義を潜在的にもっている。

(ハ) 自己写像の無効性，

これに関して，Russell は，No totality can contain member defined in terms of itself. とも言い，また Whatever involves all of a collection must not be one of the collection. とも言っている。そしてまた，XεXは無意味であることを指適している。

段階的に考えると，①一切の集合を二つに分けて，自己を含む集合と，自己を含まない集合とに分ける。ここまでは，何も矛盾が起きない。②自己を含まない集合の「すべて」Wをつくる。ここでもう逆理が起きている。③この集合Wは第一種の集合にも，第二種の集合にも属しない。この段階での矛盾が明らかになってくるが，この③の証明の手続き

に矛盾があるわけではない。問題は②の段階である。

我々の立場から言うと，思惟の直線性，直線的対応の論理関係式の上に，始めに自己を含まないという集合の性質が出てきながら，その全部といった瞬間に，自己を含む集合が自己を含まない集合の和と等値式で置かれてしまうところに矛盾発生の原因が見出しうる。

つまり，「すべて」ということばを，人は名詞か形容詞のいずれかだけと考えているために，「すべて＝その成員のすべてを含む」という動詞的役割を考えつかない。ここで，人は意味論を品詞別に分けて考えてみる必要がある。すべてということばの，意味論的な「作用」が問題なのである。含まない――含むが「すべて」という言葉で，一緒にされてしまうために，矛盾が導出してくる。せっかくすべての集合を自己を要素として含まない集合と含む集合の二種類の性質の集合に分けておきながら，背中律を適用しようとして，それが無効になってしまう結果が生じてきてしまう。

こうした結論からすると，F. P. Ramsey がクレタ島のうそつきの矛盾は，ことばの背理，Russell の矛盾は論理の矛盾と言っているが，我々の立場からすると，エピメニデスの逆理は，自己写像の逆理，Russell の矛盾は意味作用の逆理ということになる。

猶，こうした観点からすると，もし「すべて」が潜在的にもっている「含む」という意味作用さえ注意すれば，矛盾を避けるためだけのものであったなら，必ずしも Russell の階層論理は要らないことになる。逆に特別に，「すべて」ということばではなくても，思惟の直線性の上に，前後に意味作用の逆の命題をイコールの関係で結んだ時は，必ず背理の生じてくるのは当然である。ただ「すべて」のように，名詞，形容詞の意義を持ちながら，要素を含むという動詞的な意味作用をもっている好例を，Rnssell は巧妙にとり出した点に，彼の発見があったのである。しかも，それだけではなく「すべて」には，Aristoteles 以来，全称命題として論理学の最も基礎的な見方と考えられていたという事実があり，自己を含む集合としては，開集合，閉集合で無限に結びつく微妙な問題点があり，しかも19世紀以来からの集合論の論争が，この Russell の矛盾と，そしてそれと共に，彼の論理主義を，益々論争の渦中に巻きこんで，彼の視点を有名にしたものと思われる。

が，しかし，これを私達の立場のように，ことばのもつ意味以外の意味作用からくる矛盾と考えると，この Russell の矛盾だけが，数論理の病理を特に明瞭に示し出すわけではなく，私達はこれ以外に，幾つもの例をあげることができる。

例えば，こんな例である。

ある結婚式の席に招かれた人が，祝辞を述べて言った。

「新郎はめでたく今春，学業を終え，就職もきまり，新住居を定められ，そしてこの新婦とこうして御結婚なされて，誠におめでとう存じます。しかも，この席へついてから，御聞きしたことですが，今朝新郎の御祖母様は，百十五才の御長命の記録をつくって，我々未だ生ある者に長寿の範と清い生涯の範を御示しになったことを伺いまして，重ねて重ねて御祝い申しあげます。」

という祝辞のもつ矛盾である。

又，こんな例もあげられる。遠く離れた妻から，度々手紙を受けとった夫が「私はあまりにも忙がしいので，一通も手紙を書く暇はない。」とだけ書いて送った。

私達の試論は，紙数の都合でここで終り，他の有名な逆理については，別の機会に論ずることにする。しかし，ある人は，数論理の世界を作用的に考える私達の立場に奇異の感を抱く人がいるかもしれない。しかし，現代は Computer がゲームの思考を，人間にとって代ってなしうる時代である。人間の思考作用も，生化学的な，有機的な，または条件変更を許された精巧な Computer とも考えうる時代には，私達の数論理の世界と言葉と論理の世界を考える視点も，これからの数論理解明の進むべき方向の一つと見なしうるのではなかろうか。

Literature

(1) Becker, O. : Mathematische Existenz.

(2) Borel, É. : Éléments de la théorie des ensembles, 1940.

(3) Brouwer, L. E. J. : Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe, (Jahresb. d. D. Math. —Ver. Bd. 33.).

(4) Fraenkel, A. A. : Einleitung in die Mengenlehre, 1928.

(5) Hilbert, D. & Ackermann , W. : Grundzüge der theoretischen Logik, 1928.

(6) Heyting, A. : Intuitionism.

(7) Heyting, A. : Mathematische Grundlagen Forschung, Intuitionismus Beweistheorie, 1934.

(8) Kutschera, v. F. : Die Antinomien der Logik (Munchen, 1964).

(9) Gödel, K. : The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axiom of set theory, 1940.

(10) Gödel, K. : Über formal unterscheidbare Sätze der Prinpicia Mathematica und verwandter System.

(11) Russell, B. : The Principle of Mathematics, 1937.

(12) Ramsey, F. P. : The Foundation of Mathematics, 1925.

(13) Tarski, A : Logic, Semantics, Metamathematics (Papers from 1923 to 1938), Oxford, 1956.

(14) Tarski, A. : Der Wahrheitsbegriff in den Formalisierten Sprachen.

(15) Weyl, H. : Philosophy of Mathematics and Natural Science, 1949.

(16) Wittgenstein, L. : Philosophical investigation.

(17) Wittgenstein, L. : Tractus Logica-philosophicus.

(18) Kant, I. : Kritik der reinen Vernunft.

(19) Polya, G : Mathematics and Plausible Reasoning, v. 1. & v. 2. (柴垣訳　数学における発見はいかになされたか 1. 2.)

(20) 末木剛博　記号論理学　etc.