数学教育の現代化

早川克彦

現在は数学教育の大きな転換期にあたっているということが言えると思います。中学の連立方程式

$$\begin{cases} 5x+2y=47 \\ 3x+4y=45 \end{cases}$$

を取り上げてみましても，

$$\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}y=\begin{pmatrix}47\\45\end{pmatrix}$$

という書き方が用いられようとしていますが，これはただ書き方が変るというだけでなく，その式の持つ意味が変ることになります。このような変化はここ数年徐々に進んで来ましたが，最近の3年程で急激に変化して来ました。身近な例を見ましても，書店に線型代数とか行列（マトリックス）と名前のついた本は7年前には数える程しかありませんでした。ところが最近では線型代数の本が書棚を占めており，現在の小学校の算数のはじめから式の意味の取り方を変えようとしております。

次の問題を考えてみましょう

> **1.** ある自動車は $1l$ のガソリンで約17km走ることができる。次の距離を走るときガソリンは何 l いるか。
>
> (1) 100km　　(2) 150km　　(3) 175km

これは $17\,\mathrm{km}/l$ を $\frac{1}{17}l/\mathrm{km} \fallingdotseq 0.06l/\mathrm{km}$ と直して

$$0.06l/\mathrm{km}\times 100\mathrm{km}=6l$$
$$0.06l/\mathrm{km}\times 150\mathrm{km}=9l$$
$$0.06l/\mathrm{km}\times 175\mathrm{km}=10.5l$$

と計算する方が意味がわかりやすいように思います。このような場合は

$$17x=m$$

という式に $m=100$, $m=150$, $m=175$ を代入して計算するより

$$x=0.06m$$

に直して計算する方が簡単です。

しかし，これは何も今に始まったことではなく，昔からkgと貫の換算には4貫＝15kgを用い，貫からkgに直すときは $\frac{15}{4}$ を掛け，kgから貫にするときは $\frac{4}{15}$ を掛けて計算していたのと同じで別に新しいことではありません。ところが算数あるいは代数のつるかめ算はどうでしょうか？

2. つるとかめがいる。頭と足が次のように与えられているとき，つるとかめの数を求めよ。

(1) $\begin{cases} \text{頭}\ 150 \\ \text{足}\ 346 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \text{頭}\ 186 \\ \text{足}\ 472 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} \text{頭}\ 222 \\ \text{足}\ 876 \end{cases}$

算数で考えるときは“全部をつるとみるとつるがいくらで足があまる。この余った足をつるからかめに一つずつ取り換えていくと……” いうようになりますが，小学校でこのようなことを教えても全然意味がなく，かえってつるかめ算がわからないので算数がきらいになるという弊害の方が大きいことは，最近多方面で取り上げられております。もちろん中学の連立方程式の方が良いわけですが，

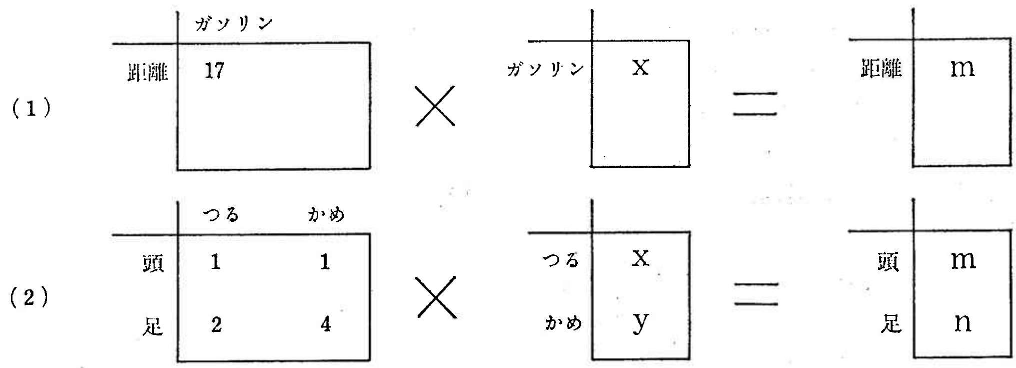
つるを x，かめを y として

(1) $\begin{cases} 1x+1y=150 \\ 2x+4y=346 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 1x+1y=186 \\ 2x+4y=472 \end{cases}$　　(3) $\begin{cases} 1x+1y=222 \\ 2x+4y=876 \end{cases}$

という式ができます。しかしこの3つの式を別々に解いて答を出すのが最善の策とは思われません。そこで，まず頭を m，足を n として

$$\begin{cases} 1x+1y=m \\ 2x+4y=n \end{cases}$$

x, y を求めて後 m, n に数を代入していくことにしますが，そのときこの式は x, y と m, n が対等な取り扱いになっていないことに気がつきます。初めの例1とこの例2を比べてみますと



この2題は同じ性質の問題であることがわかります。これを見ますと，中学の連立方程式は算数よりもすぐれていますが，しかしそれよりも更に良い方法は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

のように x, y と m, n を対等に扱った書き方，考え方を用いることです，

(1)では

$$17x=m$$

から

$$x=0.06m$$

としたのと同じように

(2)では

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\ n\end{pmatrix}$$

を導いて，あとで m, n を代入して計算するのが簡単であるということになります。

このように，今まで問題の持っている性質とは関係なく教えられていた，小学，中学の代数教材に改良が加えられはじめ，表の縦と横が 2×2，3×3 などになっている多次元の量を先の1次元の量のそのままの拡張として考える方向が強く出て来ました。この縦と横のある四角の表が行列（マトリックス）と呼ばれていて，その理論はすでに百年前に完成していましたが，最近になってこの行列が特に重要視されるようになった一つの原因は電子計算機の実用化の時代が来たことにあると思われます。

最近の電子計算機の発展は実にすばらしいものがあります。円周率 3.14159…… という値をルドルフが小数第35位まで求めたのは1600年頃のことですが，彼はこの計算にほとんど一生を費やしてしまい，その後1873年には W. Shanks によって小数第707位まで計算されましたが，それが小数第528位以降の誤っていることを誰も知らないでいました。1961年には電子計算機によって円周率の値が初めて10万桁まで計算されましたが，そのときの所要時間が8時間あまりですから，電子計算機の威力が感じられます。

これは中学，高校の教育にも関接的に影響を与えて，今までは

$$\begin{cases}5x-6y+2z=18\\ 7x+y-20z=1\\ 3x-7y+13z=16\end{cases}$$

という式を解いて，x, y, z を求める問題に対して，どの文字を最初に消去するのが計算が簡単になるかというようなことを繰り返して練習したものですが，電子計算機で解けば同じことですから，それよりもこの式を

$$\begin{pmatrix}5 & -6 & 2\\ 7 & 1 & -20\\ 3 & -7 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\ 1\\ 16\end{pmatrix}$$

として解くというように変化が出て来ました。これが，百年前の行列の理論が今日はなばしく登場してくる原因であると考えられます。では行列を用いて例2のつるかめ算をもう一度みますと

$$\begin{array}{c|cc} & \text{つる} & \text{かめ}\\ \hline \text{頭} & 1 & 1\\ \text{足} & 2 & 4\end{array}\times\begin{array}{c|c} & \\ \hline \text{つる} & \mathrm{x}\\ \text{かめ} & \mathrm{y}\end{array}=\begin{array}{c|c} & \\ \hline \text{頭} & \mathrm{m}\\ \text{足} & \mathrm{n}\end{array}$$

を下のように直して

$$\begin{array}{c|c} & \\ \hline \text{つる} & x \\ \text{かめ} & y \end{array} = \begin{array}{c|cc} & \text{つる} & \text{かめ} \\ \hline \text{頭} & & \\ \text{足} & & \end{array} \times \begin{array}{c|c} & \\ \hline \text{つる} & m \\ \text{かめ} & n \end{array}$$

頭と足は，つるとかめによってどのようにできているかを考えてみます。この

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

から

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

としたときの行列のことを，初めの行列の逆行列といっています。逆行列を求める幾つかの方法が考えられていますが，グラースマンの交代数というものを用いる方法もあり，また掃き出し法という連立方程式の加減法と同じ原理の求め方もあります。計算を省略して逆行列だけを記してみますと次のようになります。

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-c}{ad-bc} \\ \dfrac{-b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

これでつるかめ算の逆行列を求めてみますと

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -\dfrac{1}{2} \\ -1 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となり，次の表が得られます。

$$\begin{array}{c|c} & \\ \hline \text{つる} & x \\ \text{かめ} & y \end{array} = \begin{array}{c|cc} & \text{頭} & \text{足} \\ \hline \text{つる} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \text{かめ} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \times \begin{array}{c|c} & \\ \hline \text{頭} & m \\ \text{足} & n \end{array}$$

下の式と同じ意味になり

$$\begin{cases} x=2m+\left(-\dfrac{1}{2}\right)n \\ y=(-1)m+\dfrac{1}{2}n \end{cases}$$

次のつるかめ算の公式となります。

頭×2－足÷2＝つる
足÷2－頭＝かめ

例2(1)を解きますと

頭150，足346のときは

$150\times2-346\div2=127$　つる

$346\div2-150=23$　かめ

となり，(2)，(3)も同じように解くことができます。

このように

$$\begin{cases} ax+cy=m \\ bx+dy=n \end{cases}$$

という連立方程式で x, y および m, n をともに変数とみるときには，この書き方より

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

の方がすぐれていて，これで x, y を求めると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-c}{ad-bc} \\ \dfrac{-b}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$$

となります。

したがって，何故この式が得られるか？　ということ，3元や4元の連立方程式の場合はどうなるか？　a, b, c, d のどのような値に対しても逆行列が存在するか？　ということ等が高校，大学の教育の重点になって来ます。

もう一つ次の問題に移りますと，

3.　白米100gにつき，350カロリーの熱量を有し，7gのたんぱく質を含んで，その価格は7円である。いわしは重さ100gにつき150カロリーの熱量を有し，24gのたんぱく質を含んで，その価格は40円である。次の熱量とたんぱく質を得るために必要な白米といわしの量を求めその価格を計算せよ。

(1) $\begin{cases} \text{熱量　1200カロリー} \\ \text{たんぱく質　45 g} \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} \text{熱量　1825カロリー} \\ \text{たんぱく質　47 g} \end{cases}$

白米といわし各 1g あたりの量をとって表にしますと

$$\begin{array}{r|cc|} & \text{白米} & \text{いわし} \\ \hline \text{熱量} & 3.5 & 1.5 \\ \text{たんぱく質} & 0.07 & 0.24 \\ \text{価格} & 0.07 & 0.4 \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{r|c|} \hline \text{白米} & x \\ \text{いわし} & y \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r|c|} \hline \text{熱量} & m \\ \text{たんぱく質} & n \\ \text{価格} & k \\ \hline \end{array}$$

となります。この表の意味をうまく理解するためには小学２年のかけ算のはじめから

（１あたり量）×（いくら分）＝（全体の量）

という考え方で一貫しておくことが大切となります。今までの教育では 2×3 といえば $2+2+2$ のことで，あとの $\times3$ は３回加えるという回数を表わす３でしたが，最初にこのような覚え方をしてしまいますと連立方程式を多次元のかけ算として理解するときの，どうしても妨げとなります。したがって今では乗法は加法の繰り返しという点に触れないように小学のときから注意して教えられています。では何故このように１あたり量を強調するのかを考えてみますと，これは前の問題の(1)，(2)を比べてみれば直ぐわかりますが，答は

(1)　白米 300 g，いわし 100 g，価格61円

(2)　白米 500 g，いわし 50 g，価格55円

となり，(2)は必要な熱量1825カロリー，たんぱく質47gと(1)より熱量もたんぱく質もどちらも多くなっているのに価格は逆に６円安いのです。その理由を調べるには，どうしてもこの問題の熱量１カロリーあたりの価格と，たんぱく質１gあたりの価格をそれぞれ調べる必要ができます

$$\begin{array}{c|cc} & \text{熱量} & \text{たんぱく質} \\ \hline \text{価格} & u & v \end{array} \times \begin{array}{c|cc} & \text{白米} & \text{いわし} \\ \hline \text{熱量} & 3.5 & 1.5 \\ \text{たんぱく質} & 0.07 & 0.24 \end{array} = \begin{array}{c|cc} & \text{白米} & \text{いわし} \\ \hline \text{価格} & 0.07 & 0.4 \end{array}$$

この表では u, v が１あたり量となり，式はやはり

（１あたり量）×（いくら分）＝（全体の量）

となっています。これを計算しますと

熱量１カロリーは $-\dfrac{8}{525}$円

たんぱく質１gは $\dfrac{37}{21}$円

が得られ，この問は１カロリーの価格が負となっているために必要なカロリーが増せば逆に価格が安くなることがわかります。つまりこの問題で一番重要な点は１カロリーの価格が負であるということで，１あたり量が見かけ上分らない内部構造を示す役目を果していることになります。

私達は電子計算機の発達で計算上非常に恩恵を受けると同時に数学教育というものを根本的に考え直すことを教えられました。今までは，高校で教えたものを中学へ，中学のものは小学でというように早い時期に教えることばかりに気をとられ，不要な教材を切り捨てることをしなかったために，ちょうど物入れや棚が空かんや古新聞で一杯になってしまったようなもので“広く浅く”という，およそ数学の授業らしくない現在の小学中学の指導体系ができ上ってしまいました。これに対する反省は世界各国で急速に進み，“数学教育の現代化”と呼ばれています。その主旨は，あまり必要でないと思われるものを思い切

って除いてしまうこと，重要なものを順序良くまとめてなるべく表現を簡素化し，逆に意味が明瞭にあらわれるようにすること，過去になかったものを創り出していくことにあると思われます。それでは数学が無味乾燥なものになるのではないかと心配になりますが結果はその逆で，行列の授業をされた先生方が，今までより生徒が活き活きとして楽しい授業になったということを異口同音に言われます。つまり現代化とは，むずかしい事を教えるという意味は全然なく，今までとは物の見かたを変えて簡単にするというのがその本旨です。

では，このようなことはもっと昔に実行されても良さそうに見えるのに，何故今ごろ改革が行われるのかと考えてみますと，やはりこれには電子計算機の発達とか，LP（線型計画法）の理論の進展など外的な刺戟によるものが多分にあると思われます。私達は自分の覚えてしまったものは何となくそう難しくないような気がして，また次の世代に自分の習ったとおりに教えようとする気分の強いことが改良を阻んだ主な理由であろうと考えられますが，しかし今はユークリッド幾何の証明のように図形を書きながら図形を離れて証明し，図形の性質を調べるように見えながら，論理や思考過程の発表練習が主となるような教材に，中学の大部分の数学の授業時間を用いた時代は過ぎ去りました。論理や発表練習が不必要だというのではありません，今まではそのことを表面に出さず，幾何の証明と答案の書き方という中に含めてあったのでしょうが，それはかえって論理を腰味なものにしてしまいます。論理と図形とは当然別のもので，図形ばかりに論理があるわけではないのでしょう。

数学教育の現代化は

『すべての生徒にわかりやすくて程度の高い数学を』

という言葉のとおりです。そのために多く用いられるのがシェーマであり，このぴったりしたシェーマを考え出すことが私達の大きな楽しみの一つになっています。シェーマは図式で，図で式の意味を表わすのに用いられます。現在の数学教育がグラフを多く用いるのもその意味です。

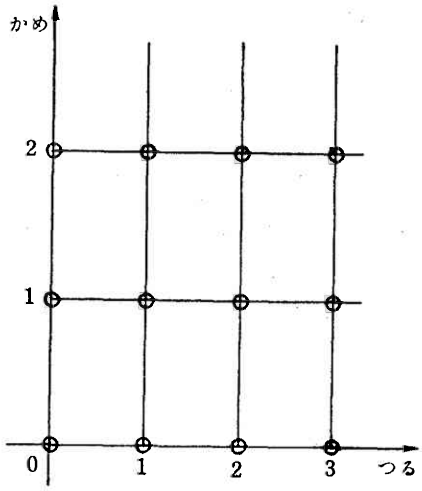
	つる	かめ
頭	1	1
足	2	4

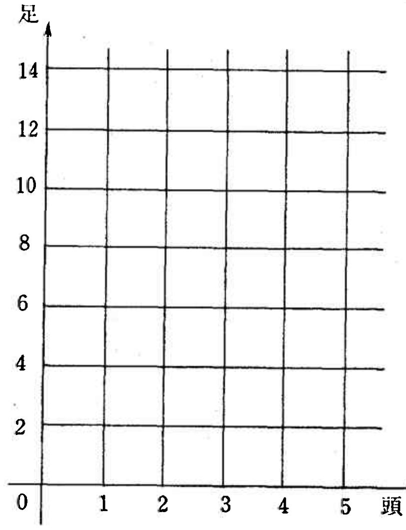
どうもつるかめ算の例ばかり引いて恐縮ですが，つるとかめ，頭と足という関係は左の表にあらわされるのですが，これだけではつるとかめの数と頭と足の数の関係の実感があらわれません。それでつるとかめの数を点で表わしてみます。

図1左がつるとかめの点で，これを右の頭と足の格子に順次写してみますと，図2のようにつるとかめの座標は斜交座標となり頭と足の直交座標の上に移って来ますが，これは線型写像と呼ばれています。

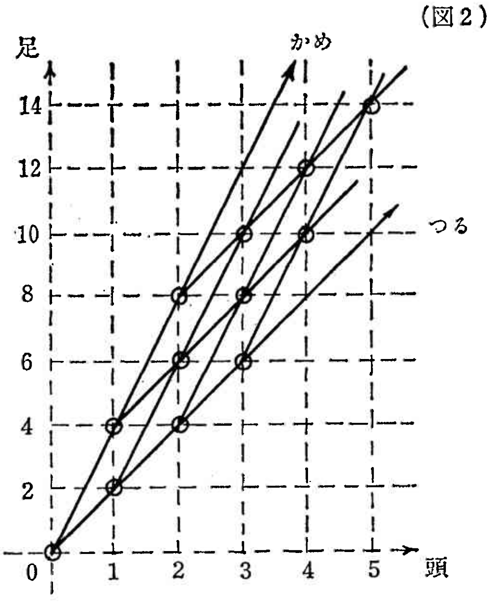
今度は順序を逆にして頭と足の点をつるとかめの直交座標に写してみますと，次の図3のように頭と足の斜交座標ができますが，これは，まえの線型写像の逆写像になっています。

（図1）

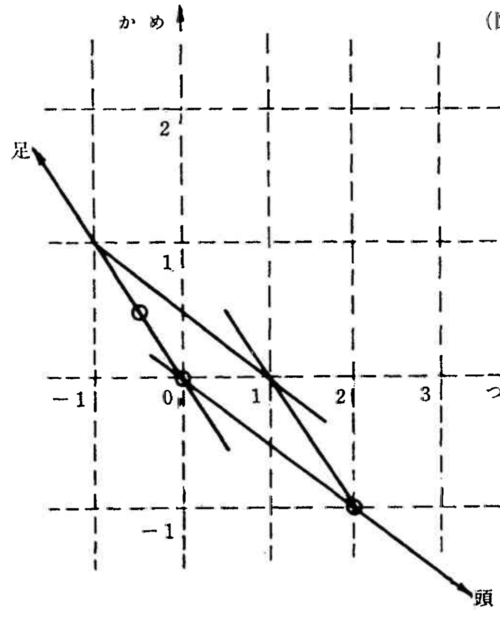




（図2）



（図3）



この図3を見ても頭と足をつるとかめであらわせば次のようになっていることがわかり

	頭
つる	2
かめ	−1

	足
つる	$-\frac{1}{2}$
かめ	$\frac{1}{2}$

頭5，足14というときは

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} 5 + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} 14 = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

つる3，かめ2ということが，図と計算と両方で導けることになります。

最近はOR（オペレーションズ・リサーチ）という分野にこの線型代数が用いられ，その計画の処理は電子計算機が行ない，多大の成果を上げています。数学教育の現代化も代数は比較的進んでいるように思われますが，まだこれからと思われる部分も多いようです。しかし一応の現代化が完成したときには，昔の数学教育の無駄なところはほとんど取り除かれ，見違えるように新鮮なものとなるのではないでしょうか。

参　考　文　献

現代数学入門シリーズ
1　現代数学の考え方（遠山啓著）
2　マトリックス（森毅著）
明治図書刊