実二次体Q($\sqrt{17}$)上のUniversal形式について

佐々木　英　洋

Universal forms over a real quadratic field Q($\sqrt{17}$)

SASAKI Hideyo

0．はじめに

Lagrangeの良く知られている結果に「任意の自然数は四つの整数の平方和で表わすことができる，すなわち任意の自然数nに対して$n=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$を満たす整数$x_1, x_2, x_3, x_4$が必ず存在する」(1789) というものがある．これを拡張して，任意の自然数を表わす整数環Z上のn元古典的正値二次形式$f(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{1\leq i, j\leq n} a_{ij}x_ix_j$，$a_{ij}=a_{ji}\in \mathrm{Z}$を，同型を除いてすべて決定するという問題に対してRamanujan，Widerlingがそういった二次形式をすべて決定した（非対角成分が整数の2倍になっているものを「古典的」な二次形式と呼ぶ)．一般にすべての環Rの元を表現する二次形式を（R上の）universal形式と呼ぶ．この問題を実二次体Q($\sqrt{m}$)上の整数環$O=\mathrm{Z}+\mathrm{Z}\omega$($m$は平方因子を持たない自然数，$\omega=\sqrt{m}$ ($m\equiv 2, 3 \bmod 4$のとき)，$=(1+\sqrt{m})/2$($m\equiv 1 \bmod 4$のとき))の場合に拡張し，「O上のuniversal形式，すなわち総正なOの元をすべて表現するO上の（古典的）総正二次形式（以下単に“Q($\sqrt{m}$)上の二次形式”と呼ぶ）はどのような形のものが存在するか」という問題が考えられる．Chan-Kim-Raghavanが$n=3$の場合を考察し，Q($\sqrt{m}$)上の3元universal形式が存在するのは，$m=2, 3, 5$の場合に限ること，またそれらの場合の3元universal形式を（同型を除いて）すべて決定した[1]．

同様にして，$m\neq 2, 3, 5$の実二次体Q($\sqrt{m}$)上で4元universal形式が存在するときのmの値を求めるという問題が考えられる．すでにQ($\sqrt{13}$)上の4元universal形式について著者による結果があり，この場合は4元universal形式が同型を除いて2個のみ存在することが証明されている[4]．

この論文ではQ($\sqrt{17}$)上の4元universal形式について考察し，同型を除いて5つの4元

総正二次形式がuniversal形式の候補として存在し，うち2つがuniversalであることを証明した．

定理．　(i) $f(x)=x_1^2+x_2^2+(2+\omega)x_3^2+(3-\omega)x_4^2+2x_3x_4$

(ii) $g(x)=x_1^2+3x_2^2+(2+\omega)x_3^2+(3-\omega)x_4^2+2x_2x_3+2x_2x_4$

はそれぞれQ $(\sqrt{17})$上のuniversal形式である．ここで$\omega=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$である．

なお，残りの3個のuniversal形式の候補として考えられる形式を以下に挙げた．

予想．　上の$f(x)$, $g(x)$以外でQ $(\sqrt{17})$上のuniversal形式の候補は（同型を除いて）次の3つに限る．

$$h_1(x)=x_1^2+(2+\omega)x_2^2+(8-3\omega)x_3^2+2x_2x_3+(3-\omega)x_4^2$$
$$h_2(x)=x_1^2+(3-\omega)x_2^2+(5+3\omega)x_3^2+2x_2x_3+(2+\omega)x_4^2$$
$$h_3(x)=x_1^2+(2+\omega)x_2^2+(3-\omega)x_3^2+2x_4^2$$

1．二次形式に関する用語など

二次形式に関するいくつかの定義，事実について以下に述べる．整数論，特に実二次体の一般論については[5]を，また二次形式の一般論については[3]を参照のこと．

またQ $(\sqrt{17})$のイデアル類群の類数は1であることに注意．

Rを類数1の実二次体上の整数環Oまたはその局所化O_pとする．またn次の対称行列全体からなる集合をS_nとする．VをRの商体T上の有限次元ベクトル空間とする．LがR-格子であるとはV上の有限生成自由R-加群であって，VのT-基底を含んでいるときにいう．R上のn元二次形式$f(x)=f(x_1, x_2, \dots, x_n)=\sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}x_ix_j=A[x]={}^txAx$, $A=(a_{ij})_{i,j}=\in S_n$, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $a_{ij}=a_{ji}\in R$と二次形式付きR-格子（以下，単に「格子」とよぶ）L（の同値類）が1対1に対応する．このとき，$L\cong\langle A\rangle$と表わす．また，格子Lの判別式dL（またはdA）を$dL=\det(A)/(R^\times)^2$で定義する．$dL\neq0$であるとき，Lは正則であるという．$A_1,\dots, A_r$をそれぞれ対称行列とし，$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$ならば$\langle A\rangle\cong\langle A_1\rangle\perp\cdots\perp\langle A_r\rangle$と表わす．このとき$dA=dA_1\cdots dA_r$となる．特に$A_1=a_1,\dots, A_r=a_r$；$a_i\in R$がすべて1次の場合$\langle A\rangle=\langle a_1,\dots, a_r\rangle$と表わす．$I_k$を$k$次基本行列に対応する二次形式付き$R$-格子とする：$I_k\cong\underbrace{\langle 1,\dots,1\rangle}_{k}$．

aをRの元，Lを二次形式付きR-格子とする．Lの元xで，$q(x)=a$を満たすものが存在するとき，Lはaを表現するという．ここでqはLの二次形式である．O-格子LがOの

すべての総正な元を表現するとき，Lをuniversal格子とよぶ．

格子Lに対し，$\overline{L}$をLと共役な格子とする．すなわちLに対応する行列のすべての成分をそれらの共役の元に置き換えた行列が$\overline{L}$に対応しているとする．Fの元aに対して，Lのscaling（Lの行列の成分をすべてa倍した格子）を$L^{(a)}$とする．また$aL=L^{(a^2)}$である．

次に二次格子の局所化について述べる．以下Oを特に実二次体$F=\mathrm{Q}(\sqrt{m})$上の整数環とする（以下のことは整数環Zに関しても同様の定義である）．F_p, O_pをそれぞれO上の素点pにおける局所体，局所環とする．W_p, L_pをそれぞれF上の二次空間W，O上の二次格子Lの素点pにおいて局所化したF_p-空間，O_p-格子とする．WをF上の正則な二次空間とし，L，Mを$FM=FL=W$なるO上の二次格子とする．Wの直交群σで$\sigma M=L$をみたすものが存在するとき，LとMは同じ類（class）に属するという．また，すべてのO上の素点pにおいて，W_pの直交群σ_pで$\sigma_p M_p=L_p$をみたすものが存在するときLとMは同じ種（genus）に属するという．Lの類，種をそれぞれcls(L)，gen(L)で表わす．

2．いくつかの3元格子の種と類について

この章ではいくつかのF上の3元格子の種に含まれる類とそれらの局所的性質について述べる．F上の格子Lの自己同型群の位数を#O(L)で表わす．$\omega=(1+\sqrt{17})/2$とおく．

F上の3元格子E_2, E_3, G_2, を$E_2\cong\left\langle\begin{pmatrix}2+\omega & 1\\ 1 & 3-\omega\end{pmatrix}\right\rangle$, $E_3\cong\left\langle\begin{pmatrix}2+\omega & 0 & 1\\ 0 & 3-\omega & 1\\ 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\right\rangle$,

$G_2\cong\left\langle\begin{pmatrix}3-\omega & 1\\ 1 & 5+3\omega\end{pmatrix}\right\rangle$とおく．$E_2$, E_3はユニモジュラー格子（判別式が1である格子）

である．

補題1．　(i) $gen(I_1\perp E_2)=gen(E_3)=\{cls(I_1\perp E_2), cls(E_3)\}$

(ii) $gen(I_1\perp G_2)=\{cls(I_1\perp G_2), cls(\langle 1,1,2+\omega\rangle)\}$

(iii) $gen(I_1\perp \overline{G_2})=\{cls(I_1\perp \overline{G_2}), cls(\langle 1,1,3-\omega\rangle)\}$

証明は，Körnerによる実二次体上の3元格子の質量を求める公式[2]を適用する．

$I_1\perp E_2$の質量を計算すると3/16となるが，#O$(I_1\perp E_2)=8$, #O$(E_3)=16$であることが計算によって確かめられ，1/8+1/16=3/16より，Körnerの公式の両辺が等しくなる．よって(i)が得られた．

同様にして$I_1\perp G_2$の質量は3/16，#O$(I_1\perp G_2)=8$, #O$(\langle 1,1,2+\omega\rangle)=16$より(ii)が得ら

れる．(iii)は(ii)の共役であるので明らか．

補題２．　$I_1 \perp E_2, I_1 \perp G_2, I_1 \perp \overline{G_2}$はそれぞれすべての素点$p$において$O_p$の元をすべて表現する，すなわちこれらの格子は$O_p$上のuniversal格子である．

補題３．　次がそれぞれ成り立つ．

(i) $2E_3 \subset (I_1 \perp E_2) \subset 2^{-1}E_3$

(ii) $(3-\omega)\langle 1, 1, (2+\omega)\rangle \subset I_1 \perp G_2 \subset (3-\omega)^{-1}\langle 1, 1, (2+\omega)\rangle$

(iii) $(2+\omega)\langle 1, 1, (3-\omega)\rangle \subset I_1 \perp \overline{G_2} \subset (2+\omega)^{-1}\langle 1, 1, (3-\omega)\rangle$

いずれも証明は容易なので略する．

3．Q($\sqrt{17}$)上の４元Universal格子の候補

この章では，$F=\mathrm{Q}(\sqrt{17})$上の４元Universal格子の候補を（同型を除いて）求める．上の章で定義した格子の記号を以下も引き続き使用する．

LをF上の４元universal形式とする．Lは$1, 2+\omega, 3-\omega, 2$を表現するので，

$$L \cong \left\langle \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & 2+\omega & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & 3-\omega & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \ \alpha_{ij} \in O$$

と表わせ，右辺の行列は正値となる．

$2+\omega$と$3-\omega$は２つの総正なF上の整数の和に分けることはできないことが容易に確かめられることに注意すると，$\alpha_{12}=\alpha_{13}=0$となる．また$\begin{vmatrix} 2+\omega & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & 3-\omega \end{vmatrix} = 2-{\alpha_{23}}^2>0$より$\alpha_{23}=0, \pm 1$のいずれかだが，$\alpha_{23}=\pm 1$ならば$L$はユニモジュラー格子$E_2$を部分加群として含むことになり$L \cong I_2 \perp E_2, \langle 1, 2\rangle \perp E_2$のいずれかが得られる．しかし$\langle 1, 2\rangle \perp E_2$は$6+3\omega$を表現しないことが計算により分かる．よってこの格子はuniversal格子とならない．$\alpha_{23}=0$ならば，同様にして小行列式を計算して

$L \cong \langle 1, 1, 2+\omega, 3-\omega\rangle, \langle 1, 2+\omega, 3-\omega, 2\rangle, \langle 1, 2+\omega\rangle \perp G_2, \overline{\langle 1, 2+\omega\rangle \perp G_2}$

が得られる．しかし$\langle 1, 1, 2+\omega, 3-\omega\rangle$は３を表現しない．また判別式と各素点における局所化した格子の型を考えると，補題１(i)より残りの３個の格子すべてを真の部分加群として含む格子は$I_1 \perp E_3$のみである．以上よりF上のuniversal格子の候補として，以下の５

個の格子が挙げられる.

$$L_1 := I_2 \perp E_2,\ K_1 := I_1 \perp E_3,\ K_2 := \langle 1, 2+\omega\rangle \perp G_2,\ K_2' := \overline{K_2},$$
$$K_3 := \langle 1, 2+\omega, 3-\omega, 2\rangle$$

なお,第1章の定理,予想に挙げた二次形式と各格子との対応は次の通りである.

二次形式	f	g	h_1	h_2	h_3
格子	L_1	K_1	K_2	K_2'	K_3

また,L_1以外の格子には,次の包含関係がある. : $K_3 \subset \left\{ \begin{matrix} K_2 \\ K_2' \end{matrix} \right\} \subset K_1$

4.Universal性の証明

この章では,格子L_1, K_1がuniversal格子であることを証明する.その前にいくつか補題を示す.

$F=\mathrm{Q}(\sqrt{17})$の基本単数を$\varepsilon=3+2\omega=4+\sqrt{17}$とおく.Oの元$\alpha, \beta$に対し,$\alpha=\beta\varepsilon^{2n}$があるn∈Zに対して成り立つとき,$\alpha\sim\beta$と表わす.また,$\omega^2=\omega+4$であることに注意.

補題4. αをOの総正な元とする.このとき,$\alpha\sim a_\alpha+b_\alpha\varepsilon$となる$a_\alpha, b_\alpha\in\mathrm{Z}$で$0\leq\frac{25}{16}b_\alpha<a_\alpha$を満たすものが存在する.

証明: $\alpha=a+b\omega$とおく.$b<(25/16)a$ならば$a_\alpha=a, b_\alpha=b$とおけばよい.

$(0<)a\leq(25/16)b$とする.このとき,

$\alpha\varepsilon^{-2}=(a+b\omega)(41-16\omega)=(41a-64b)+(25b-16a)\omega$となるが,$\alpha\varepsilon^{-2}$が総正であることに注意して$0<41a-64b\leq41a-\frac{16}{25}\cdot64a=\frac{1}{25}a<a$.

すなわちε^{-2}を繰り返しかけることにより題意が得られる.

$b<0$ならば,$\alpha\varepsilon^2=(a+b\omega)(25+16\omega)=(25a+64b)+(41b+16a)\omega$より$25a+64b>0$から$41b+16a>41b-\frac{64}{25}\cdot16b>\frac{1}{25}b>b$. ε^2を繰り返しかけると$b\geq0$の場合に帰着できる.□

上の$a_\alpha+b_\alpha\varepsilon(a_\alpha, b_\alpha\in\mathrm{Z}, 0\leq\frac{25}{16}b_\alpha<a_\alpha)$の型の元を簡約化された($O$の)元とよぶことにする.

補題5. αを簡約化されたOの元とする.このときαは

$\alpha=A\cdot1+B\cdot\varepsilon^2+(C+D\omega)$と表わされる.ただし$A, B, C, D$は正の(有理)整数$0\leq D\leq15$, Cは$C+D\omega$が総正な元となる最小の正整数である.

証明：　$\alpha=a+b\omega$を簡約化されたOの元とする．Bを$b-16B\geq 0$なる最大の正整数ととると，$\alpha-\varepsilon^2B=a'+b'\omega$は総正($a'>(25/16)b'\geq$より)かつ$0\leq b'\leq 15$が確かめられる．$a'+b'\omega-A$が総正なるよう正整数$A$を決めると，$C, D$も題意に合うように決まる．□

補題6．　$p=2+\omega$または$3-\omega$とする．このとき$L_1^{(p)}\subset L_1$, $K_1^{(p)}\subset K_1$が成り立つ．

証明：　単純な計算により容易に確かめられる．□

定理の証明：　L_1がuniversal格子であることを示す．K_1の証明も同様にして行うことができる．

αをOの総正な元とする．補題6より$\alpha\notin(2+\omega)O\cup(3-\omega)O$が$L_1$によって表現されるかどうかという問題に帰着できる．補題3より$\alpha=a+b\omega$, $a\equiv 1\bmod 2$, $b\equiv 0\bmod 2$の型の簡約化された元と仮定してよい．

αを補題4の型の和に分ける．まず$A\geq 5(=(2+\omega)+(3-\omega))$の場合を証明する．

(a)$a\equiv 1\bmod 4$, $b\equiv 0\bmod 4$の場合：　このとき$\alpha-1$は総正かつ$\alpha-1\equiv 0\bmod 4$である．$\alpha-1$は$I_1\perp E_2$またはE_3で表現される．$\alpha-1$が$I_1\perp E_2$で表現されるならば，$\alpha=1+(\alpha-1)$は$I_2\perp E_2=L_1$で表現され，この場合証明が終わる．$\alpha-1$がE_3で表現されているとする．このとき，$\alpha-1\in 2^2O$より$\alpha-1$は$2(I_1\perp E_2)$または$2E_3$で表現され，補題3(i)からいずれの格子も$I_1\perp E_2$に含まれることから$\alpha-1$が$I_1\perp E_2$で表現され，同時にαはL_1で表現される．

(b) $a\equiv 1\bmod 4$, $b\equiv 2\bmod 4$の場合：　このとき$\alpha-(2+\omega)$は総正かつ$\alpha-(2+\omega)\equiv 3+\omega\bmod 4$である．$\alpha-(2+\omega)$は$I_1\perp G_2$または$\langle 1,1,2+\omega\rangle$で表現される．$\alpha-(2+\omega)$が$\langle 1,1,2+\omega\rangle$で表現されるならば，$\alpha$は$\langle 2+\omega,2+\omega\rangle\perp I_2\subset L_1$で表現される．$\alpha-(2+\omega)$が$I_1\perp G_2$で表現されているとする．このとき，$\alpha-(2+\omega)\in(3-\omega)^2O$より$\alpha-(2+\omega)$は$(3-\omega)\langle 1,1,2+\omega\rangle$または$(3-\omega)(I_1\perp G_2)$で表現され，補題3(ii)からいずれの格子も$\langle 1,1,2+\omega\rangle$に含まれることから$\alpha-(2+\omega)$が$\langle 1,1,2+\omega\rangle$で表現される．すなわち$\alpha$は$L_1$で表現されることになる．

(c) $a\equiv 3\bmod 4$の場合：　このとき$\alpha-(3-\omega)$は総正かつ$\alpha-(3-\omega)\equiv\pm\omega\bmod 4$である．$\alpha-(3-\omega)$は$I_1\perp\overline{G_2}$または$\langle 1,1,3-\omega\rangle$で表現される．$\alpha-(3-\omega)$が$\langle 1,1,3-\omega\rangle$で表現されるならば$\alpha$は$\langle 3-\omega,3-\omega\rangle\perp I_2\subset L_1$で表現される．$\alpha-(3-\omega)$が$I_1\perp\overline{G_2}$で表現されているとする．このとき，$\alpha-(3-\omega)\in(2+\omega)^2O$より$\alpha-(3-\omega)$は$(2+\omega)\langle 1,1,3-\omega\rangle$または$(2+\omega)(I_1\perp\overline{G_2})$で表現され，補題3(iii)からいずれの格子も$\langle 1,1,3-\omega\rangle$に含まれることから$\alpha-(3-\omega)$が$\langle 1,1,3-\omega\rangle$で表現される．すなわち$\alpha$は$L_1$で表現される．

$B\geq 5$の場合も同様にして証明を行う．$A, B\leq 4$については（A, B, C, Dが有限個の場合しか残っていないので）直接計算して表現されることをチェックすればよい．□

5　その他の格子

Q($\sqrt{17}$)上の4元universal形式をすべて決定するには，第2章で与えられたK_2, K_2', K_3がuniversal格子であることを証明することが残っている．しかし，2章の最後で示したようにこれらの格子間に包含関係があるので，実質的にはK_3がuniversalであることをいえば，残りの3つ（4章で証明したK_1も含めて）もuniversalとなる．

現在$K_3 := \langle 1, 2+\omega, 3-\omega, 2\rangle$のuniversal性の証明について研究中だが，この格子の大きな特徴として次が成り立つ．

命題1．Oの元α, βがK_3で表現されるならば，その2つの積$\alpha\beta$もK_3で表現される．

証明はK_3に対応する二次形式h_3で表わされる2つの数の積を直接計算しても求められるが，K_3が四元数環の構造を持つことからすぐに導かれる．

すなわち，Oの任意の素元（必要ならばεをかけて総正と仮定してよい）がK_3により表現されることがいえれば上の命題よりK_3がuniversalであることを示すことができる．この方向で現在考察中である．

参考文献

[1]　W-K. Chan, M-H, Kim and S.Raghavan, *"Ternary universal integral quadratic forms over real quadratic fields"*, Japan J. Math.,22(1996), 263-273.

[2]　O.Körner, *"Die Masse der Geschlechter quadratischer Formen vom Range ≦ 3 in quadratischen Zahlkörpern"*, Math. Ann. 193(1971), 279-314.

[3]　O.T.O'Meara, *"Introduction to Quadratic Forms"*, Springer Verlag(1973).

[4]　H.Sasaki, *"Quaternary Universal Forms over* Q($\sqrt{13}$)*"*, preprint.

[5]　高木貞治，「初等整数論講義(第2版)」，共立出版.

キーワード：実二次体，二次形式，universal形式

Keywords：real quadratic fields, quadratic forms, universal forms