# 実二次体Q($\sqrt{5}$)上の総正な二次形式の平方和表現について

佐々木　英　洋

# Sums of squares of totally positive definite quadratic forms over real quadratic field Q($\sqrt{5}$)

SASAKI Hideyo

## 1．はじめに

Lagrangeの良く知られている結果（1789）に「任意の自然数は四つの整数の平方和で表すことができる，すなわち任意の自然数$n$に対して$n=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$を満たす整数$x_1, x_2, x_3, x_4$が必ず存在する」がある．この結果を拡張した問題が様々考えられ，二次形式の整数論が発達したが，この問題の一つの拡張として，「任意の整数環Z上の$n$元古典的正値二次形式$f(x)=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)=\sum_{1\le i, j\le n} a_{ij}x_ix_j$, $a_{ij}=a_{ji}\in$ Zを何個の$n$次線形形式の平方和（以下単に"平方和"と呼ぶ）で表すことができるか，すなわち$\sum_{1\le i, j\le n} a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{g}(c_{i1}x_1+\cdots+c_{in}x_n)^2$を満たす$g$の最小値はいくつか」という問題が考えられてきた（非対角成分が整数の2倍になっているものを「古典的な二次形式」と呼ぶ）．この問題はWaringの問題と呼ばれ，Mordell，Koにより$2\le n\le 5$のとき$g=n+3$となることが証明された．

しかし$n\geqq 6$の場合は平方和で表現することのできない整正値二次形式が存在する．そこで次の条件を満たす自然数$g_z(n)$の最小値を求める問題が考える：

「何個かの$n$次線形形式の平方和で表すことのできる，整数環Z上の$n$元古典的正値二次形式$f(x)=f(x_1,\ldots x_n)$は$g_z(n)$個の高々平方和で表すことができる」．

この問題に対しKim-Ohは，平方和で表される6元二次形式は高々10個の平方和で表すことができる，すなわち$g_z(n)=10$であることを証明した．$n\ge 7$の場合は$g_z(n)$の値は決定しておらず，Icazaにより$n\geqq 5$，Ohにより，$7\le n\le 11$，Sasakiにより$14\le n\le 20$並びに$n=7$の場合に対してそれぞれ$g_z(n)$の上限を与える式（値）が示されている（以上の結果については[5]を参照のこと）．

一方，Z 以外の環上の二次形式，例えば実二次体$F=\mathrm{Q}(\sqrt{m})$（$m$は平方因子を持たない自然数）上の整数環$O$上の二次形式に対し，上記の問題を考えることができる．この論文では$F=\mathrm{Q}(\sqrt{5})$の場合の上記の問題を考察する．すなわち

「次の条件を満たす自然数$g(n)=g_{\mathrm{Q}(\sqrt{5})}(n)$の最小値はいくつになるか：

“何個かの$n$次線形形式の平方和で表すことのできる，$F=\mathrm{Q}(\sqrt{5})$の整数環$O$上の$n$元古典的総正二次形式$f(x)=f(x_1,\dots x_n)$は$g(n)$個の平方和で表すことができる”」.

この問題に対して，次の結果を得た．

定理：(i)，$g(2)=5$,

(ii)，$g(3)\leq 70$,

(iii)，$n=4$，5 に対して$g(n)\leq 3\cdot 4^n+8$

がそれぞれ成り立つ．

注：$g(1)=3$ すなわち任意の$\mathrm{Q}(\sqrt{5})$の総正な$O$の元は 3 個の（総正な$O$の元の）平方和で表されることが[2]で示されている．

## 2．二次形式に関する用語など

二次形式に関するいくつかの定義，事実について以下に述べる．代数的整数論，特に実二次体の整数論の一般論については[7]を，また二次形式の一般論については[3]を参照のこと．

$R$を類数 1 の実二次体上の整数環$O$またはその局所化$O_p$とする．また$n$次の対称行列全体からなる集合を$S_n$とする．$V$を$R$の商体$T$上の有限次元ベクトル空間とする．$L$が$R$－格子であるとは$V$上の有限生成自由$R$－加群であって，$V$の$T$－基底を含んでいるときにいう．$R$上の$n$元二次形式$f_L=f_L(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sum_{1\leq i,\,j\leq n}a_{ij}x_ix_j=A[x]={}^t xAx$，$A=(a_{ij})_{i,j}\in S_n$，$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$，$a_{ij}=a_{ji}\in R$と二次形式付き$R$－格子（以下，単に「格子」とよぶ）$L$(の同値類)が 1 対 1 に対応する．このとき，$L\cong\langle A\rangle$と表わす．格子$L$の判別式$dL$（または$dA$)を$dL=det(A)/(R^{\times})^2$で定義する．$dL\neq 0$ であるとき，$L$は正則であるという．またこのとき，$V$の次元を$L$の階数といい，$\mathrm{rank}(L)$で表す；

$\mathrm{rank}(L)=\dim(V)$．$A_1,\ldots,A_r$をそれぞれ対称行列とし，$A=\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix}$ ならば

$\langle A\rangle\cong\langle A_1\rangle\perp\cdots\perp\langle A_r\rangle$と表わす．このとき$dA=dA_1\cdots dA_r$となる．特に$A_1=a_1,\ldots,A_r=a_r;a_j\in R$がすべて1次の場合$\langle A\rangle=\langle a_1,\ldots,a_r\rangle$と表わす．$I_k$を$k$次基本行列に対応する二次形式付き$R$－格子とする：$I_k\cong\langle\underbrace{1,\ldots,1}_{k}\rangle$．$I_k$は$k$個の平方和に対応する格子である．$F$の元$a$に対して，$L$の scaling（$L$の行列の成分をすべて$a$倍した格子）を$L^{(a)}$とする．また$aL=L^{(a^2)}$である．

次に二次格子の局所化について述べる．以下$O$を特に実二次体$F=\mathrm{Q}(\sqrt{m})$上の整数環とする（以下のことは整数環$Z$に関しても同様の定義である）．$F_p$，$O_p$をそれぞれ$O$上の素点$p$における局所体，局所環とする．$W_p$，$L_p$をそれぞれ$F$上の二次空間$W$，$O$上の二次格子$L$の素点$p$において局所化した$F_p$－空間，$O_p$－格子とする．$W$を$F$上の正則な二次空間とし，$L$，$M$を$FM=FL=W$なる$O$上の二次格子とする．$W$の直交群$\sigma$で$\sigma M=L$をみたすものが存在するとき，$L$と$M$は同じ類（class）に属するという．また，すべての$O$上の素点$p$において，$W_p$の直交群$\sigma_p$で$\sigma_p M_p=L_p$をみたすものが存在するとき$L$と$M$は同じ種（genus）に属するという．$L$の類，種をそれぞれ$\mathrm{cls}(L)$，$\mathrm{gen}(L)$で表わす．$\mathrm{gen}(L)\supseteq\mathrm{cls}(L)$の包含関係があるが，$\mathrm{gen}(L)$を$\mathrm{cls}(L)$による同値類の代表元の数を$L$の類数といい，$\mathrm{h}(L)$で表す．

## 3．いくつかのQ$(\sqrt{5})$上の格子の種と類について

この章ではいくつかの$F=\mathrm{Q}(\sqrt{5})$上の格子の種に含まれる類とそれらの局所的性質について述べる．また$F$の基本単数を$\varepsilon=(1+\sqrt{5})/2$とおく．

$E_2$，$E_4$，$E_6$，$E_8$を次で表される$F$上の格子とする：

$$E_2\cong\left\langle\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 \end{pmatrix}\right\rangle,\quad E_4\cong\left\langle\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & & \\ \varepsilon & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\rangle,\quad E_6\cong\left\langle\begin{pmatrix} 2 & \varepsilon & & & & \\ \varepsilon & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 2+\varepsilon & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}\right\rangle,\quad E_8\cong\left\langle\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & 1 & 2 & \\ & & & & 1 & & & 2 \end{pmatrix}\right\rangle,$$

ただし，成分が空欄になっているところは，すべて0である．このとき$E_4$，$E_6$，$E_8$はユニモジュラー格子（判別式が1である格子），特に$E_4$，$E_8$は偶（対角成分がすべて2の倍数）ユニモジュラーである．また上の格子はすべて平方和で表現できないことに注意．

補題1：(i)　$n \leq 4$ に対して $h(I_n)=1$,

(ii)，$gen(I_6)=\{cls(I_6),\ cls(I_2 \perp E_4),\ cls(E_6)\}$,

(iii)，$gen(E_8)=\{cls(E_8),\ cls(E_4 \perp E_4)\}$,

証明. (i) (ii) は[4]，(iii) は[1]によりそれぞれ証明されている．

補題2：(i) $n \leq 4$ に対して$(I_n)_p$はすべての素点 $p$ において階数$(n-3)$の格子をすべて表現する．

(ii) $(E_8)_p$はすべての素点 $p$ において，階数5の偶格子をすべて表現する．

補題3：　$i=4,\ 6,\ 8$，とする．$E_i^{(2)}$ は $I_i$により表現される．

証明はいずれも容易なので省略する．

## 4．平方和の個数

この章では，§1で与えた定理の証明を行う．

命題1．$g(2)=5$.

証明：$\ell$を階数2の格子で，$N$個の平方和で表現されているとする．すなわち$f_\ell=\sum_{i=1}^{N}(a_{1i}x_1+a_{2i}x_2)^2$．素元 $p=(2)=2\mathcal{O}$において$(\ell_2)_p$が$(E_2)_p$に同型でなければ$\ell$は$I_4$で表現される，すなわち4個の平方和で表現される（[6，Lemma12]）．今$(\ell_2)_p \cong (E_2)_p$とする．このとき$a_{ji}(j=1,\ 2\ ;\ i=1,\ldots,N)$のうち$2\mathcal{O}$に入らないものが存在する．平方和の順序の入れ替え，並びに$\ell$の基底の取り方により，$a_{11}$が$2\mathcal{O}$に入らないとしてよい．このとき$f_{\ell'}=f_\ell-(a_{11}x_1+a_{21}x_2)^2$に対応する格子$\ell'$は$(\ell'_2)_p$が$(E_2)_p$に同型でないので$I_4$で表現される．よって$\ell$は5個の平方和で表現される．

5個の平方和で表現されるが4個以下では表現できない格子の例として，$\left\langle\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 4+2\varepsilon\end{pmatrix}\right\rangle$などがある．

以上より，$g(2)=5$が証明された．□

命題２．$g(3)\leq 70$.

証明：$\ell$を階数３の格子で，$N$個の平方和で表現されているとする．すなわち
$f_{\ell}=\sum_{i=1}^{N}(a_{1i}x_1+a_{2i}x_2+a_{3i}x_3)^2$.

この平方和に含まれている線形形式のうち，$(a_{1i_1},\ a_{2i_1},\ a_{3i_1})\equiv(a_{1i_2},\ a_{2i_2},\ a_{3i_2})\mathrm{mod}2$となるものがあれば，$(a_{1i_1}x_1+a_{2i_1}x_2+a_{3i_1}x_3)^2+(a_{1i_2}x_1+a_{2i_2}x_2+a_{3i_2}x_3)^2$に対応する格子は，scaleが$2O$に含まれる（二次形式に付随する総一次形式の値がすべて２の倍数になる）．
よって

(*) $f_{\ell}=\sum_{i}(a_{1i}x_1+a_{2i}x_2+a_{3i}x_3)^2+\sum_{j}\left(\sum_{r=1}^{2}(a_{1i_{(j,r)}}x_1+a_{2i_{(j,r)}}x_2+a_{3i_{(j,r)}}x_3)^2\right)$.

ただし$1\leq s,t\leq N$に対して

$$(a_{1i_{(j,1)}},\ a_{2i_{(j,2)}},\ a_{3i_{(j,3)}})\equiv(a_{1i_{(j,2)}},\ a_{2i_{(j,2)}},\ a_{3i_{(j,3)}})\mathrm{mod}2$$

と表される．式(*)の第２項はscaleが$2O$に含まれる格子となるので，補題２，３より対応する格子は$gen(I_6^{(2)})$で表現される，すなわち６個の平方和で表現される．また$a_{ji}\equiv0$，$1$，$\varepsilon$，$1+\varepsilon$　mod2のいずれかなので，第１項の平方和の個数は$4^3=64$個以下としてよい．
以上より，$g(3)\leq 64+6=70$が得られる．□

命題３．$n=4$，５に対して$g(n)\leq 3\cdot 4^n+8$.

証明：上の証明とほぼ同じ議論を行えばよい．$\ell$を階数$n(n=4,\ 5)$の格子で，$N$個の平方和で表現されているとする．すなわち$f_{\ell}=\sum_{i=1}^{N}(a_{1i}x_1+\cdots+a_{ni}x_n)^2$．この平方和に含まれている線形形式のうち，$(a_{1i_s},\dots,\ a_{ni_s})\equiv(a_{1i_t},\dots,\ a_{ni_t})$ mod2 $(1\leq s,\ t\leq 4)$となるものがあれば，$\sum_{r=1}^{4}(a_{1i_r}x_1+\cdots+a_{ni_r}x_n)^2$に対応する格子は，scaleが$4O$に含まれる．よって

(*) $f_{\ell}=\sum_{i}(a_{1i}x_1+\cdots+a_{ni}x_n)^2+\sum_{i}\left(\sum_{r=1}^{4}(a_{1i_{(j,r)}}x_1+\cdots+a_{ni_{(j,r)}}x_n)^2\right)$.

ただし$1\leq s,t\leq 4$に対して

$$(a_{1i_{(j,s)}},\dots,\ a_{ni_{(j,s)}})\equiv(a_{1i_{(j,t)}},\dots,\ a_{ni_{(j,t)}})\ \mathrm{mod}2$$

と表される．式(*)の第２項はscaleが$4O$に含まれる格子となるので，補題２，３より対応する格子は$gen(E_8^{(2)})$で表現される，すなわち８個の平方和で表現される．また第１項の平方和の個数は$3\cdot 4^n$個以下としてよい．以上より，$g(n)\leq 3\cdot 4^n=8$が得られる．□

命題１，２，３より定理が示された．

## 5． その他

以上で$2 \leq n \leq 5$に対する$g(n)$の値（の上限）をみてきた．一般に平方和（基本行列）に対応する格子$I_n$の類数$h(I_n)$は$n$が大きくなれば急激に増えるため局所的な情報（各素点における状態）が大局的な情報（有理整数環Zや代数的整数体上の整数環などにおける状態）と同一視できない．よってこのような平方和の問題は難しくなる．今後は$n \geq 3$に対して$g(n)$の上限の評価を良くする，あるいは値そのものを求める手法を見つける必要があるが，現在考察中である．

また将来的には一般の実二次体，あるいは総実な代数体に対しても同様の平方和の個数の問題を考えていく予定である．

**参考文献**


[1] P.J.Costello and J.S.Hsia, "*Even unimodular 12-dimensional quadratic forms over* Q$(\sqrt{5})$", Adv. Math.（1987）241-278.

[2] H.Maass, "*Über die Darstellung total positiver Zahlen des Körpers R*$(\sqrt{5})$ *als Summe von drei Quadratischen Zahlkörpern*", Math. Ann., 193（1971），279-314.

[3] O.T.O'Meara, "*Introduction to Quadratic Forms*", Springer Verlag（1973）.

[4] H.Pfeuffer, "*Über die reelle Spiegelungsgruppe $H_4$ und die Klassenzahl der sechsdimensionalen Einheitsform*", Arch. Math. 31（1978），126-132.

[5] H.Sasaki, "*Sums of Squares of Integral Linear Forms*", J.Austral.Math.Soc.（Series A）69（2000），298-302.

[6] H.Sasaki, "*2-unversal O-lattices over real quadratic fields*", To appear in manuscripta mathematica（2006）.

[7] 高木貞治,「初等整数論講義（第2版）」，共立出版.


キーワード：実二次体，二次形式，平方和

**Keywords**：real quadratic fields，quadratic forms，sums of squares