立　体　の　話

山　本　恪　二

「プロローグ」

芸術家というものは本来が実技家であって理論家ではない。此の事はスポーツマンと同様であるが従って理論めいた事は話したがらないものである。特に日本人は万葉の昔から言挙げしない事を一種の美徳と見做す伝統があって自作を言葉で説明したりする事には羞恥の感情が働くのであろう。だからと言って所謂老大家と目されている人達の勿体振った一家言を承るのも余り有難いものではない。

バッハの遺した未完の「フーガの技法」は書物かと思ったら全部楽譜ばかりで読譜の素養のないものには当て外れだがそれでも音の流れの変化が音譜で視覚化されている点が何となく分る様な気にさせられる。バッハに限らず一般に楽譜というものの役目は聴覚の時間的な流れの中に展開される音楽の実体を言わば静止した視覚空間の連続に置き換える事であろうが此の点言葉による理論の展開によて論証が進められる幾何学が図形の参加によって一挙に確証されるのと似た所がある。

同じ様にもし仮に画家のニコラ・プサンが「絵画の技法」を残したとしてもそれは一冊の書物ではなくて絵画の様々な技法が画面のあちこちに組織的に集大成されている一枚のタブロオであっていい筈であろう。

「誰でも自分のやって来た様に勉強すれば自分と同じ様になれる」という言葉を残したのも矢張りバッハだが彼の言葉には技法の持つ普遍妥当性への確信がみなぎっている。日本の伝統芸術の栄えていたのと同じ時代のバッハの頃は未だ芸術家の個性がもてはやされるロマン主義は出現していなかったのである。

基礎教育の段階で学校の教師が生徒の個性を一々考慮に入れては教育の実があげられるだろうか。掛算の九々の暗誦，音楽なら耳による音程の識別，漢字なら筆順の習得等々すべて基礎的なものは先ず普遍的なものであって，此等をふまえた上ではじめて一人前の個性が仕立て上げられると考えるべきではなかろうか。没個性的でアカデミックな学校教育は個性を台なしにしてしまうという声を耳にする事があるが生涯教育が取沙汰される中で近々数年間にすぎない学校教育の期間で駄目になる様な貧弱な個性なら学校教育以外の所で行われる専門家養成機関に入っても堪えて行けないだろう。特に戦後になって個性の名の下に自我意識ばかりがはびこって来た事の結果として学生の忍耐力が甚しく低下した事は見逃せない。その為大学在学中に外国書を一冊でも読破出来た学生が激減しているので

はなかろうか。美術を志す学生に限って見てもオブジエの流行は芸術を感覚だけの作業と見做す習慣がついてしまって芸術のもう一方の大切な要素であるシュジエ（主題）に対する無関心が助長され，芸術が思想を担う役目を持つ事が忘れ去られてしまっている。だから美術史を通じての社会の歴史や思想史に関する彼等の知識は寒々としたものになりはてているのである。

美術の技術的基礎教育に関してイタリアルネサンスの芸術家，特にミケランジェロ等は人体デッサンこそは建築，彫刻，絵画，工芸等，美術の全領域に亙る基礎訓練となるものと見做していてこれに解剖学や遠近法をも含めた体系的な基礎教育が定められていた。そしてこれが次の時代には美術アカデミイとして整備されて行く事になるのだが西洋美術が日本に輸入された明治初期の時点には西洋のお膝元では既に印象派の時代を迎えていて，人体のアカデミックな形態研究は時代遅れと見做されつつあった。従って日本では西欧のアカデミズは充分な成育をまつ事もなくモダニズムに突入する事になってしまった。そして戦前，戦後を通じて美術はひたすらに世界の流行の目まぐるしい変化に追随して来たのだが，事今日に及んでみると一体何が新しいのかさえも見分けがつかなくなったかの感がある。恐らく目新しさだけを追い求める事自体の是非に対する反省の時期に入っていると見てよいのであろう。そして一番大切な事は何が基礎であるべきかをはっきりと見届ける事であって特に教育の場にあっては此の事は不可欠と言ってよかろう。

然し乍ち殆ど非人間的とでも言える程の変動の激しさが吾々を揺り動かしている現今では教師と学生との区別さえも見分けのつかない程だが人類が亡びない限りは，思想の担い手としての言語（日本語も外国語も）の研究は不必要とはならないだろうし，之と同じ理由から美術家が人間の形を研究する事の意義に絶対の確信を持ち続けても間違いはあるまい。そしてその為には勿論解剖学的知識は欠かせないだろうが此れについて一つ気の付いた事実を紹介しよう。前世紀の終りに近い頃に書かれたアーサー・トムソンの

〝A Handbook of Anatomy for Art Students〟

という解剖学の参考書が其後百年近くを経た今日までアメリカでは需要が途絶える事なく出版が続いている事。更に此の書物は京都芸大の図書館にも大正期から蔵書となり，同じく京都芸大の学長であられた川村多実二先生が大正の初期に此の本を底本として美術解剖学を書いておられる事。特に今日では川村先生の書は殆ど入手不可能だが日本語で紹介された美術解剖学書としては私の経験する限りでは最良の書であり乍ら日本では其後殆ど顧られる事がなかった。所が原本の出版元であるアメリカでは前衛芸術の最盛期と雖も再販が続けられ（それがアメリカの感心な所だが）我国にも輸入されて容易に入手する事が出来た事等。

此等の事柄に関心のない人達には問題にならないだろうが別に数多く出版されている解剖アトラス（図版）を参考にし乍ら面倒でも英文のテキストを通読すれば必ず得る所は大

きい筈である。所が一般に日本の美術家は多少は解剖学的知識の必要を感じてアトラスだけは購入していてもテキストを読まないからこれでは地図だけ買って眺めるだけで地理学のテキストを読まないのと同様な片手落というものだ。

然し乍ら若し確かな自覚的要求があるならば敢て此の様な古めかしい書物に頼らなくても最新式の映像機器を活用して人体の解剖学的な機能を三次元的或いは四次元的にも分析把握出来る新しい時代を迎えている筈だが要求其物が熟して来ないうちは折角の可能性も猫に小判というものだ。

更に人間の形ばかりでなく広く宇宙の森羅万象に目を向ける事の必要は中国の「芥子園画伝」に早くから説かれているにも拘らず現代の芸術家達は専ら自己の個性を売物にする事だけに余念がない。此の点では恐らく芸術家は世界で一番立ち遅れた人間と見做されても仕方がないだろう。

併しいくら声を大にしても眠りこけている人達を一々お起しにかかる事は無駄骨と諦めて私は自分の考えを進めて行く事にしよう。尤も私の考えている事にした所が別に大して新鮮味があると自負は出来ないけれども此の数年或は数十年の間借り物ではなく素手で立体に関して考え続けて少しは小さな発見にまで漕ぎつけ事もあるのでこれを紹介したいと思う。つまりこれは私自身の受けて来た貧弱な立体教育を自ら補う為のささやかないとなみの積み重ねに過ぎないのではあるが。

「立体的思考へのアプローチ」

一見して余りにも判り切った事と思い込んでそれ以上考える事もなく見過ごしていた事柄を改めて問われて見ると全然見当違いの答えしか出せない事に気が付いて愕然とさせられる事があるものだ。九々の掛算なぞ日本では算数の基本教育にとって不可欠の一部であってこれが出来ない方がおかしい位だがこれと同程度に基礎的な事柄であり乍ら現代の日本人の頭の中で久しい間ないがしろにされたままで日常の思考がそれを素通りしているのが立体の基本的構造に関する知識なのである。例えば 4 つの正三角形で囲まれた三角錐（正四面体）を丁度半分の高さの所で底面に平行な平面によって切断すると角頂が一つ切り落とされて高さが半分になった角錐台が残される。これと全く同じ手続きによって残りの三つの角頂も全部切り落とした時真中に残された部分はどの様な形の立体なのかという問題は誰もが即座に答えられるとは限らない。

更に別の例を挙げてみよう。

正六面体（さいころの形）を一つの平面で斜に切断する場合その切り口は三角形か四角形，更に五角形，六角形にまで変化し得るものが生じるものだ。併しどの様な切り方で此等の変化が生じるのかは先の問題よりいくらか易しいかも知れないが之等を図解する事は楽ではない。

日本の義務教育で立体に馴染ませる配慮が不充分である事は恐らく明治初期の義務教育制度の創設以来一貫して変らずに続いて来た事であって今日では百才の老人と雖も同様な教育を受けて来た筈である。従って立体の基礎知識の欠けた状態が今では日本人全体に行き渡っている為にその様な欠陥が吾々の内部に存在している事の自覚さえもが無くなっているのが現実ではなかろうか。では何故此の様な事になったのかに関して色々な理由が考えられるだろうがその最大の理由は学校教育がそれを用いて行われる所の物的手段が言葉や文字や数字の様に黒板や教科書の様な平面上で示し得る物に偏していた為ではなかろうか。尤も此れ等以外にも音や図形や色彩や或は手足を動かせて体でリズムや呼吸を学ばせる教育が行われて来たのも確かである。然し空間を行為によって操作し，その構造を知的に把握出来る方向への指導は未だに未開発のまま放置されているのである。

立体の把握は同時に幾何学的分析力を必要とするから小学生の年令では無理だと言う意見が出るかも知れない。併し立体の知識の初歩的な段階ならば小学生と雖も或程度習得理解の可能な余地は必ずある筈である。所で立体に対する教育の不備は立体の命名其物の不充分さに迄及んでいる。立体の形状を示す日本語として立方体，直立体，角柱，角錐，円筒，円錐，球等が使われ此等によって充分に内容は理解出来るが，その形状が一歩複雑になるともうその名称は内容を充分に伝えるには無力になる。平面図形である正多角形と立体図形である正多面体との名称を比較して見ても正五角形や正七角形がどんな形であるかはすぐ理解されるのに対して正四，正六，正八，正十二，正二十等の多面体は名前だけではその形状は充分に示されているとは言えないのである。事実，正四面体と言う代りに正三角形だけで囲まれた三角錐と言った方が分かり易いし，正六面体はさいころの形と言った方がぴんと来る。更に正八面体ともなればもうどんな形か戸惑う人，或は眼前に実物を見せてもそれにどんな名前が付いているのかさえ判らない人がいる。ましてや正十二面体，正二十面体なぞは言葉を聞いただけでは皆目見当も付かない人がどれ程多い事か。

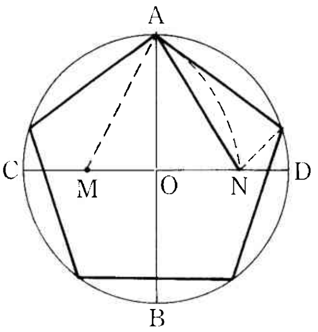
そんな訳で，此処に改めて正多面体とはどんな形の立体なのかを考え直す事から始める事にしようと思う。正多面体とはその表面を覆う平面が全部同一の正多角形（正三角形，正方形或は正五角形）である事。更に各の立体の角頂はどれもが同数の面（或は稜線）で取り巻かれている事。此の二つの条件は同時に両方共必要であってどちらか一方を欠くと正多面体ではなくなる。前の方の条件の必要な事は誰でもすぐ分る事だが後の方は気付かない人が多い。例えば2個の同じ寸法の正四面体（三角錐）の夫々の底面を貼り合わせて出来る六面体は其の表面が6つの等しい正三角形で覆われているがこれは正六面体ではない。その理由は貼り合された底面の3つの角頂はどれも4つの面で囲まれているのに対して残りの2つの角頂は3つの面で囲まれている。此の様に角頂によってはそれを囲む面の数が変わって一律ではない立体は正多面体とは呼ばれない。

ところで此の様に表面が同じ正三角形ばかりで覆われている立体は特にデルタ多面体と

呼ばれている。そして此の種の多面体は外に八面体，十面体，十六面体等があるから読者は同じ正三角形をつなぎ合わせて其の様な立体を探し出して戴き度い。さて以上の事をふまえた上で５通りの正多面体（５通りしかない事は数学的に証明出来る。）の一覧表を作って各の特徴を見較べるとしよう。

種類＼性質	面の形	角頂の数	稜線の数	一角頂を囲む面(或は稜線)の数
正 4	△	4	6	3
正 6	□	8	12	3
正 8	△	6	12	4
正 12	⬠	20	30	3
正 20	△	12	30	5

上の表の中で特に正十二面体と正二十面体とはその角頂や稜線の数を宙で数え難い筈だから読者は画用紙とセロテープを用いて実物を組み立ててから其の数を見届けて頂き度い。



所で正十二面体を作るには先ず正五角形の作図の仕方を知らねばならないから左図を用いて之を説明しよう。左図のＡＢ，ＣＤは互いに直行する直径。Ｍは半径ＯＣの中点である時，ＯＤ上に，ＡＭ＝ＭＮとなる様なＮ点を求めれば線分ＡＮは円周を五等分し此等の等分点を結べば正五角形を得る。これと同形の正五角形を12個作って３個が一つの角頂に集まる様に辺々をセロテープでつなぐと正十二面体を得る。以上の様に実物を制作する事は立体に馴染む為に欠かせない事だが併し数学的な計算によって此等の数を求める事も出来るから之を紹介しておこう。先ず稜線の数の算出だが立体の表面の正多角形を全部別々に切り離した時に出来る多角形の辺数と面数との積は辺数の総計となるがこれには稜線が二度数へられているから，稜線の数＝$\frac{1}{2}$(辺数×面数)の式が得られ此の公式は先の５つの正多面体全部に適用出来る。

次に角頂の数を求めるには稜線の時と同様先ず立体を正多角形に分解すると多角形の角頂数と面数との積は角頂数の総計となるが，立体の角頂はこれをとり巻く面によって共有されている。従って次の式

$$\frac{\text{多角形の角頂数}\times\text{面数}}{\text{各の角頂を囲む面数}}=\text{正多面体の角頂数}$$

が成り立ち此の公式も５つの正多面体全部に適用できる。

さて上の一覧表を基として此処か立体の様々な性質を導き出す事が出来るが，此等の可能性の一つとして次に正多面体の外接多面体に就て考えて見よう

或る多面体の外側に別の多面体が外接する場合その接触の仕方次第で色々な外接多面体が可能となる。例えば外側の立体が内側の立体の角頂だけで外接する場合と稜線だけで外接する場合とを比較して見ても其等の外接多面体の面の数も形も異って来る。

先ず面の数に就て言えば角頂に於てのみ接する外接多面体の面数は内側の立体の角頂の数に等しく，又内側の立体の稜線でのみ接する外接多面体の面の数は内側の立体の稜線の数に等しいが一般に凸多面体の角頂数は稜線数より少ないのが原則(オイラーの定理から)であるから外接多面体の面の数も此の原則に従って少なくなるのである。其処で此等二通りの種類の外接多面体の場合の夫々を更に先の一覧表の五通りに分けて一々吟味して見よう。

〔I〕　正多面体の角頂で接する外接多面体

例えばピラミッドの頂点で接触する水平面を想定する時此の平面にはピラミッドの4つの斜面に対して等角の関係位置を保っている。そして以下に述べる5つの正多面体のいずれもが此のピラミッドの場合と同様にその各の角頂に於て接触する外接面が角頂を取り巻く幾つかの面の夫々と等角をなす様に配置されている時，全体の外接多面体はどの様な形を取り得るかが問題となるのであるが，此の時先の一覧表に示されている角頂数から外接多面体の面の数を一々吟味して見よう。

ⓐ　正四面体の角頂数は4，従ってその外接多面体は正四面体，即ち内外二者同形。

ⓑ　正六面体の角頂数は8，従ってその外接多面体は正八面体

ⓒ　正八面体の角頂数は6，従ってその外接多面体は正六面体

此のⓑとⓒとの場合はその内接，外接多面体が交互に入れ替る関係にある事は一覧表にも示されているが立体幾何学ではこれは共役の関係と呼ばれているものである。所が一覧表をよく見ると此の次のⓓ，ⓔに当たる二者即ち正十二面体と正二十面体との間にも全く同じ関係がある事が示されている。即ち此の二者にあっても角頂の数と面の数とが丁度逆に入れ替っている事が分る。だから此処にも共役の関係が成り立っている事が表を見ただけで分るのである。

〔II〕　正多面体の稜線で外接する多面体

普通人家の屋根の斜面は棟の線を境にしてその両側で傾斜しているものだが今此の棟の線に接触する水平面を想定する時屋根の両斜面は此の水平面に対して等角の関係位置を保つ事になる。正多面体の稜線で外接する外接多面体を考える場合も此の立体の夫々の面が棟の上の水平面と同様に内接多面体の稜線を挟む二つの斜面に対して等角の関係位置を保ち乍らこの稜線と接触するのであるが此の時

ⓐ　正四面体の稜線は6本。従って外接多面体は六面体である。特に此の場合は正六面

体になる

ⓑ　正六面体の稜線は12本。従ってその外接多面体は十二面体だが，これは12個の菱形で囲まれているから正十二面体ではなくて菱形十二面体と呼ばれている。

ⓒ　正八面体の稜線は十二本。従ってその外接多面体も菱形十二面体であるが，ⓑ，ⓒいずれの場合も菱形は全く同じ形状であってその長短二本の対角線の比は $\sqrt{2}:1$ である事は中学程度の数学力で充分突きとめられる事柄であるがこれも実物を作って考えれば遥に容易に理解出来よう。但しⓑとⓒとでは外接の仕方が異なっていてⓑの場合は外接が菱形の短い方の対角線に於て行われるのに対してⓒの場合は長い方の対角線で行われる。

ⓓ　正十二面体の稜線は30本。従ってその外接多面体は菱形三十面体となる。

ⓔ　正二十面体の稜線も30本。従ってその外接多面体も菱形多面体となる。此のⓓとⓔとの関係はⓑとⓒとの関係に酷似しているが菱形が少し異なっていて長短2つの対角線の比は　$\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1):1$　となって少し細長くなる。所で此の比例値は正五角形の対角線の長さと一辺の長さとの比と同じであり更に又，美学で説かれている所の黄金分割比とも一致している点でも注目に値する。更に外接の仕方もⓑ，ⓒの場合と同様ⓓに於ては短い方の対角線で，ⓔに於ては長い方の対角線で夫々外接する。

最後に正十二面体の最も手っ取り早い作り方を紹介しておこう。先ず画用紙一杯に大きな等円を二つ描き之に夫々内接正五角形を描き込む。次に五角形の対角線を5本引くと真中に小五角形が出来るが更に此の小五角形の5本の対角線の両端を延長して外側の大五角形の辺と交わらせると新に同形の正五角形が5個生れて全体が花模様の形になる。此の花模様を二つ切り抜くとこれが正十二面体の展開図になるから之で正十二面体が組み立てられる。

所で上に述べた様な手続きで正十二面体を制作するのには誠に容易な事に思われるがこれを以て正十二面体が分かったと思い込むのは早すぎる。紙という平面の材料の上に正五角形を描いてから正十二面体を作り出す方法以外に例えば樹脂製の細い直線パイプを用意して穴の中に糸を通してつなぎ合せるとパイプは稜線の役目を果してこれで立体が出来そうだがそれには先ず稜線となるパイプの数を定めねばならない。これには先の一覧表を見れば30本と分るが此等のパイプに糸を通して然るべく継ぎ合せても直に十二面体が出来るものではない。その一部分の正五角形さえも不安定で第一どれ一つとして平面の状態が維持出来ない。其処で個々の五角形に然るべき長さの対角線のパイプを5本ずつあてがって補強すればこれでどうにか正十二面体に到達出来るだろう。そして此の方法では対角線は5本×12　即ち60本必要となる。併し乍ら此の方法は平面的発想であって，もし立体空間の内部に介在する対角線を利用すれば42本で事が済むのでこれを説明してみよう。

正十二面体の20個の角頂の内の8個を選んで此等の間に等長の12本の対角線を設置する

と正六面体が出来る筈だがこれも尚不安定なので更にその内の4個の角頂を6本の対角線を結んで出来る正四面体を内接させるとはじめて正六面体は安定する。更に此の正六面体の外部の正方形の上には夫々等長の5本の稜線から成る寄棟屋根の立体が載る事になるが此の最后の立体も未だ安定しないので棟となる稜線の一端から此の棟の両側にある台形の斜面に対角線を1本ずつを設置するとはじめて全体が安定する。此の斜面の対角線の数は2本×12　即ち24本となり，これに先の六面体及び四面体の対角線を加えると　24本＋12本＋6本　計42本となる。稜線で立体を組み立てるには以上の様に甚だ煩わしい工事になってしまうが，5通りの正多面体中の3通りはすべて正三角形の面から構成されて安定しているから補強の手数は掛からない。然し残りの正六面体は正方形が不安定だがこれに関しては正十二面体の所で補強に触れた筈である。

5つの正多面体の制作は以上に見て来た様に線状パイプを使うとなると先に示した一覧表だけでは間に合わなくなり更に其等の内部に存在する対角線の数や長さまでも追加せねばならなくなる。其処で説明を後廻しにして追加事項を表に示すと以下の通りになる。

対角線 / 種類	長短の種類	数	長さ(一辺の長さを1とした時の)
正4			
正6	1	4	$\sqrt{3}$
正8	1	3	$\sqrt{2}$
正12	3	100 { 長10 中30 短60	$\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{2}K$ $\sqrt{(\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2-1^2}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}=K+1$ $\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\sqrt{3}K$
正20	2	36 } 長6 短30	$\sqrt{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2+1^2}=\sqrt{K^2+1}$ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}=K$

「説明」先ず正四面体は三角錐だからその内部には対角線は存在しないので論外。

次に正六面体は，一辺の長さを1とする外側の正方形の対角線の長さが$\sqrt{2}$だから六面体の内部には直角を挟む二辺が1と$\sqrt{2}$とから成る直角三角形が存在しこれの斜辺$\sqrt{3}$は正六面体の対角線となる。そしてその数は4本である。

正八面体の場合は3本の対角線が縦，横，高さで三方向の軸を形成してその長さは一辺を1とする正方形の対角線，即ち$\sqrt{2}$である。

正十二面体となると事情が一挙に複雑になる。此の場合は現物の立体。それも出来れば透明な樹脂の板で制作すると内部がよく見えて理解が容易になる筈である。

先ず長さの異なった対角線が一角頂から発する種類と数を調べてみよう。一角頂から対

極の角頂に到る対角線が1本，これは最長で外接球の直径となるものである。次に此の対極頂の周りにある三つの角頂，これに到る対角線が3本でこれは中位の長さである。そして対極頂から更に遠去かった所で対極頂から等間隔に並ぶ6つの角頂，此処に最短の対角線が6本存在する。そして此等以外の角頂に到る線は立体の表面に露呈するので対角線と呼ばず数の中に入れない。

以上は一角頂から発した3種類の対角線の夫々の数であるが立体の全体には角頂が20個ある。そこで此等を夫々20倍すると往復を数えることになるから必要な倍数はその半分即ち10倍で足りる事になる。そして以上の調査から夫々の長さの対角線を求めると

最長は10本，中位の長さのものは30本，最短の長さのものは60本，合計100本となる。

次は此等の対角線の長さの算出であるが先ず20個の角頂の中から然るべき8個を選んで此処に正六面体を内接させると此の正六面体の一辺は外側の正五角形の対角線をなしその長さは $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ である。そして正十二面体の最短の対角線は内接正六面体の表面の正方形の対角線と一致しその長さは $\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ である。

次に最長の対角線は同じ内接正六面体の対角線と一致しその長さは $\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ となる。

最後に中長の対角線は此の内接正六面体からは外れているが此の場合は最長の対角線を斜辺として立体の一稜を他の一辺とする直角三角形が成り立っている事に着目すると三平方に定理により 中長の長さ $=\sqrt{\left(\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2-1^2}=\frac{\sqrt{5}+3}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1$ となる。今 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}=k$ をおいて以上の結果を書き換えて見ると

長 $=\sqrt{3}\,k$　中 $=k+1$　短 $=\sqrt{2}\,k$　となる。

最後は正二十面体だがこれは面数は多いにも拘らず対角線の総数は正十二面体の場合よりも少なく又その種類も二種類だけである。

先ず総数は先の正十二面体の方式に準じて一角頂から発する対角線6本，従ってその総数は　6本×12÷2＝36本　となる。

更に長い方の対角線（外接球の直径）は $\frac{12}{2}=6$ 本　従って短い方は　36本－6本＝30本となる。

次に此の正二十面体にあって短い方の対角線は一角頂の周囲を5個の正三角形がとり巻いて五角錐を形成していてその底面となる正五角形の対角線が立体の短い方の対角線と一致する。従ってその長さは $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ となる。又此の短い対角線はその一端で1本の稜線と直交して直角三角形を形成しこれの斜辺が長い方の対角線となる。その長さは三平方の定理によって

$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2+1^2}$ となり，更に $\frac{\sqrt{5}+1}{2}=k$ とおけば

短 $=k$　長 $=\sqrt{k^2+1}$　となる。

既に正多面体の対角線（但し最長のもの）が同時に外接球の直径でもある事を見て来た

がもし更に内接球の半径が分れば正多面体の体積の計算も可能となるのでこれを最後の問題にしたいと思う。但し此の問題に関しては個々の正多面体の具体的な数値に触れず一般的な関係式だけを述べるに留めておく事にする。

先ず叙述を分り易くする為に，長さ，面積，体積等をローマ字で表わすと

R_1 ＝ 外接球の半径

R_{11} ＝ 内接球の半径

r_1 ＝ 外側正多角形の外接円の半径

r_2 ＝ 外側正多角形の内接円の半径

V ＝ 正多面体の体積

S ＝ 立体表面の全面積

s ＝ 外側多角形１個の面積

N ＝ 面の数

n ＝ 外側多角形１個の辺数

l ＝ 稜線の長さ

以上の諸項目から，最初にR_{11}を求めると

$R_{11}=\sqrt{R_1^2-r_1^2}$ （三平方の定理）

次にVはsを底面，R_{11}を高さとする角錐が頂点を球の中心に集合したものと考えられるので

角錐の体積$=\frac{s\times R_{11}}{3}$ 及び $s=\frac{r_2\times R_{11}\times n}{2}$である事から

$$V=\frac{s\times R_{11}}{3}\times N=\frac{l\times r_2\times R_{11}\times n\times N}{2\times 3}=\frac{r_2R_{11}nN}{6}$$

$\therefore\quad V=\frac{r_2R_{11}nN}{6}$ なる式が得られる

以上の様な正多面体の体積を求める方法は球の体積を求める方法と全く同根である事を附け加えておこう。